كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : **الحادية عشر**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

[2] $R(x) = be^{ax}$

نفتش عن حل خاص من الشكل $y_p = Ae^{ax}$ وذلك إذا لم يكن a جذراً للمعادلة المميزة.

ملاحظة: إذا كان a جذراً للمعادلة المميزة مكرر k مرة فإننا نفتش عن كل حل خاص من الشكل:

$$y_p = Ax^k e^{ax}$$

مثال: $y'' - 2y' + y = e^{3x}$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$\Rightarrow m = 1$ جذر مضاعف

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$$

1	$y_p = Ae^{3x}$
-2	$y' = 3Ae^{3x}$
1	$y'' = 9Ae^{3x}$
	$Ae^{3x} - 6Ae^{3x} + 9Ae^{3x} = e^{3x}$

$$4Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{3x}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: $y'' - 2y' + y = e^x$

من المثال السابق نجد أنّ:

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$$

1	$y_p = Ax^2 e^x$
-2	$y_p' = 2Axe^x + Ax^2 e^x$
1	$y_p'' = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2 e^x$
	$2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$$

3) $R(x) = b\cos ax$

أو $b\sin ax$

أو $b_1\cos ax + b_2 \sin ax$

عندئذٍ نفتش عن حل خاص من الشكل:

$$y_p = A\sin ax + B\cos ax$$

وذلك إذا لم يكن $a \pm ia$ جذراً للمعادلة المميزة.

ملاحظة:

في حال كان $R(x) = b_1\cos ax + b_2 \sin ax$

نفتش عن حل من الشكل:

$$y_p = A\cos ax + B\sin ax + D\cos cx + E\sin cx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إذا كان أحد جذور المعادلة المميزة مكرر كمرة عندئذ نفترض الحل الخاص من الشكل:

$$y_p = x^k (A\sin ax + B\cos ax)$$

مثال:

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x$$

$$m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m_1 = -1 \quad m_2 = 2$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$

$$y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

$$(-2A + 2B - 4A)\sin 2x + (-2B - 2A - 4B)\cos 2x = \sin 2x$$

بمطابقة الأمثال نجد:

$$-6A + 2B = 1$$

$$-6B - 2A = 0$$

بحل الجملة نجد أن:

$$A = \frac{-3}{20}, \quad B = \frac{1}{20}$$

$$y_p = -\frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$y'' + y = \sin x$

$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i$

$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

1	$y_p = x(A\sin x + B\cos x)$
0	$y' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x)$
1	$y'' = A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x)$
	$2A\cos x - 2B\sin x = \sin x$

بمطابقة الأمثال نجد:

$A = 0 \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$

$y_p = -\frac{1}{2} x \cos x$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

[4] $R(x) =$ هو ناتج حدود الحالات الثلاث السابقة

عندئذٍ نأخذ y_p ناتج الحلول المفروضة ونربطهم جبرياً بمطابقة المعاملات.

$R(x) = e^{ax} P_m(x)$

$y_p = e^{ax}(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0)$

$R(x) = e^{ax} P_m(x) \cos bx$

أو

$e^{ax} P_m(x) \sin bx$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أو $e^{ax} P_m(x) (k_1 \sin bx + k_2 \cos bx)$

$$y_p = e^{ax}\left[(A_m x^m + \dots + A_0)\sin bx + (B_m x^m + \dots + B_0)\cos bx\right]$$

حيث m أعلى درجة للحدود الواردة في كل حالة من الحالات السابقة

مثال:

$$y'' - y' - 2y = x\sin x + 2\cos x$$

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = (A_1 x + A_0)\sin x + (B_1 x + B_0)\cos x$$

وباقي المشتقات والتعويض نحصل على الطلوب.

$$y'' - y' - 2y = x\sin x + 2\cos 2x$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = (A_1 x + A_0)\sin x + (B_1 x + B_0)\cos x + D_1 \cos 2x + D_2 \sin 2x$$

وباقي المشتقات والتعويض نحصل على المطلوب

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 - 4e^{3x} + 5\sin 2x + xe^{-x}$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + A_4 e^{3x} + A_5 \sin 2x + A_6 \cos 2x + (A_7 x + A_8) x e^{x}$$

وباقي المشتقات والتعويض نحصل على المطلوب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة الاعتاج: لحل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية:

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad \cdots \star$$

$$y(x) = y_h + y_p$$

طريقة الاعتاج:

1) نكتب الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

2) نعتبر الثوابت تابعة لـ x أي $c_1(x)$ و $c_2(x)$ بحيث يكون

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

3) نشتق المعادلة ★

$$y' = c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2' + c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2$$

نشترط: $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \quad \cdots \star 1$

يصير لدينا: $y_p' = c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2'$

$$y_p'' = c_1(x) y_1'' + c_2(x) y_2'' + c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2'$$

بالتعويض في ★ نجد أنه:

$$c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = R(x)$$

فنكون هنا المعادلة و معادلة ★1 معادلتين جبريتين بالنسبة للمجاهيل $c_1'(x)$ ، $c_2'(x)$ بالحل المشترك نحصل على $c_1'(x)$ و $c_2'(x)$ وبالمكاملة نحصل على $c_1(x)$ ، $c_2(x)$

مثال: $y'' - y = e^x \quad \cdots \star$

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

$$y_p' = C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} + C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x}$$

من الشرط نجد أنّ:

$$C_1'(x)e^x + C_2'e^{-x} = 0 \quad \cdots (1)$$

$$y_p' = C_1(x)e^x - C_2(x)e^{-x}$$

$$y_p'' = C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} + C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

بالتعويض في ~~في~~ نجد أنّ:

$$C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = e^x$$

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0$$

ولدينا:

بالحل المشترك نجد أنّ:

$$2C_1'(x)e^x = e^x \Rightarrow C_1'(x) = \frac{1}{2}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}x$$

$$2C_2'(x)e^{-x} = -e^x$$

ومنها نجد أنّ:

$$C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$y_p = \frac{1}{2}xe^x + \left(-\frac{1}{4}e^x\right)e^{-x}$$

$$y_p = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}$$

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}$$

ملاحظة:

طريقة الأمثال لحل معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة من الدرجة n عندما أثناء تطبيق الطريقة نشتق دائماً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i' = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-2)} = 0$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = R(x)$$

عندئذٍ نحصل على n معادلة خطية بدلالة المجاهيل

$(C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x))$ بالحل المشترك لها نحصل على:

$(C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x))$ بالمكاملة نحصل على:

$(C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x))$ فيكون لدينا:

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960