كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

$$\phi(D)y = R(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\phi(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

ملاحظة:

$$(D-a)y = R(x) \Rightarrow y' - ay = R(x)$$

$$\Rightarrow \mu = e^{-ax}$$

$$y(x) = e^{ax}\left(C + \int e^{-ax} R(x)\,dx\right)$$

$$y(x) = \underbrace{C e^{ax}}_{y_h} + \underbrace{e^{ax}\int e^{-ax} R(x)\,dx}_{y_p}$$

$$y_p = e^{ax}\int e^{-ax} R(x)\,dx$$

$$y_p = \frac{1}{D-a} R(x) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{D-a} R(x) = e^{ax}\int e^{-ax} R(x)\,dx} \quad \star$$

حالات خاصة لـ $R(x)$

① الطرف الثاني في ① هو

$$R(x) = e^{ax}$$

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{\phi(a)}$$

حيث $\phi(a) \neq 0$ أي a ليست أحد جذور المعادلة المميزة

$$\phi(m) = 0$$

• إذا كان a جذر للمعادلة المميزة و مكرر k مرة:

$$\phi(D) = (D-a)^k H(D)$$

حيث $H(a) \neq 0$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^k} \cdot \frac{1}{H(D)} e^{ax}$$

$$y_p = \frac{1}{(D-a)^k} \cdot \frac{e^{ax}}{H(a)}$$

$$y_p = \frac{1}{H(a)} \cdot \frac{1}{(D-a)^k} \cdot e^{ax} \quad \text{--- (2)}$$

باستخدام القانون ✱ نجد أن:

$$\frac{1}{D-a} e^{ax} = e^{ax} \int e^{-ax} e^{ax} dx = x e^{ax}$$

$$\frac{1}{(D-a)^2} e^{ax} = \frac{1}{D-a}\left(\frac{1}{D-a} e^{ax}\right) = \frac{1}{D-a} x e^{ax}$$

باستخدام القانون ✱ نجد أنّ:

$$\frac{1}{(D-a)^2} e^{ax} = e^{ax} \int e^{-ax} \cdot x e^{ax} dx = e^{ax} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} e^{ax}$$

$$\frac{1}{(D-a)^3} e^{ax} = \frac{1}{D-a}\left(\frac{1}{(D-a)^2} e^{ax}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{D-a} x^2 e^{ax}$$

$$\frac{1}{(D-a)^3} e^{ax} = \frac{1}{2 \times 3} x^3 e^{ax}$$

⋮

$$\frac{1}{(D-a)^k} e^{ax} = \frac{x^k}{k!} e^{ax} \quad \text{--- ✱✱}$$

بتعويض هذا القانون في (2) نصل إلى المطلوب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أمثلة:

① $(D^2+2D-3)y = 42e^{4x}$

$m^2+2m-3=0$

$m_1=1 \quad , \quad m_2=-3$

$y_h = C_1e^{x} + C_2e^{-3x}$

$y_p = \frac{1}{D^2+2D-3} \cdot 42e^{4x} = \frac{42}{21}e^{4x} = 2e^{4x}$

$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} + 2e^{4x}$

② $D^2(D-2)^3 = 48e^{2x}$

$m_1 = m_2 = 0$

$m_3 = m_4 = m_5 = 2$

$y_h = (C_1+C_2x) + (C_3+C_4x+C_5x^2)e^{2x}$

$y_p = \frac{1}{(D-2)^3} \cdot \frac{48}{D^2}e^{2x} = 12\,\frac{1}{(D-2)^3}e^{2x}$

$y_p = 12 \cdot \frac{x^3}{6}e^{2x} = 2x^3e^{2x}$

$y(x) = C_1+C_2x+(C_3+C_4x+C_5x^2)e^{2x} + 2x^3e^{2x}$

(2) الطرف الثاني = تابع قلق:

$R(x) = \cos(ax+b)$

$R(x) = \sin(ax+b)$

$R(x) = A\cos(ax+b) + B\sin(ax+b)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_p = \frac{1}{\phi(D^2)} \cos(ax+b) \quad * = \frac{1}{\phi(-a^2)} \cos(ax+b)$$

حيث $\phi(-a^2) \neq 0$ أي $\pm ia$ ليست أحد جذور المعادلة المميزة

* إذا كان $\pm ia$ جذراً للمعادلة المميزة أو إذا $\phi(D) = 0$ أو إذا كان مؤثر كثير الحدود التفاضلي يحوي على أسس فردية بالنسبة لـ D عندها سنعوض عن التوابع المثلثية بتوابع أسية.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

أمثلة:

① $(D^2+9)y = \sin 2x$

$$m^2 + 9 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 3i$$

$$y_h = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9} \sin 2x = \frac{1}{-4+9} \sin 2x = \frac{1}{5} \sin 2x$$

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 2x$$

② $(D^3 - D^2)y = 2\cos x$

$$D^2(D-1)y = 2\cos x$$

$$m^2(m-1) = 0$$

$$m_1 = m_2 = 0$$

$$m_3 = 1$$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_p = \frac{2}{D^2(D-1)}\cos x = \frac{2}{D-1}\cdot\frac{1}{D^2}\cos x$$

$$= \frac{-2}{D-1}\cos x = \frac{-2(D+1)}{D^2-1}\cos x = \frac{-2(D+1)}{-2}\cos x$$

$$= (D+1)\cos x$$

$$y_p = -\sin x + \cos x$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \sin x + \cos x$$

(3) $(D^2+1)y = \cos x$

$$m^2+1=0 \Rightarrow m_{1,2} = \mp i$$

$$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\cos x = \frac{1}{D^2+1}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(D-i)(D+i)}(e^{ix}+e^{-ix})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\underbrace{\frac{1}{D-i}e^{ix}}_{x e^{ix}} + \frac{1}{-2i}\underbrace{\frac{1}{D+i}e^{-ix}}_{x e^{-ix}}\right]$$

$$y_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2i}\left[x e^{ix} - x e^{-ix}\right]$$

$$y_p = \frac{x}{2}\left[\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right] = \frac{x}{2}\sin x$$

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) الطرف الثاني كثير حدود من الدرجة m :

نرتب الحدود في $\phi(D)$ حسب قوى D المتصاعدة .

$$\phi(D) = a_n + a_{n-1}D + \dots + D^n$$

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} R(x)$$

ونقوم بقسمة (1) على $\phi(D)$ للحصل على ناتج قسمة من الدرجة m وباقي قسمة أقل درجة ممكن $m+1$

$$\frac{1}{\phi(D)} = H(D) + \frac{R_1(D)}{\phi(D)}$$

$H(D)$ من الدرجة m — $R_1(D)$ أقل درجة ممكن $m+1$

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} R(x) = H(D) R(x)$$

* إذا كانت $a_n = 0$ عندها :

$$\phi(D) = a_{n-1}D + a_{n-2}D^2 + \dots + D^n$$

$$\phi(D) = D(a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + D^{n-1})$$

مثال :

$$(D^4 + 4D^2)y = x^2 + x + 3$$

$$m^4 + 4m^2 = 0$$

$$m^2(m^2 + 4) = 0$$

$$m_1 = m_2 = 0$$

$$m_{3,4} = \mp 2i$$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

$$y_p = \frac{1}{D^4 + 4D^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} R(x) = \frac{1}{D^4+4D^2}(x^2+x+3)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2}\cdot\frac{1}{4+D^2}(x^2+x+3)$$

$$\begin{array}{r|l} 4+D^2 & 1 \\ & \underline{1+\frac{1}{4}D^2} \\ & \frac{1}{4}-\frac{1}{16}D^2 \\ & \underline{-\frac{1}{4}D^2} \\ & \underline{-\frac{1}{4}D^2-\frac{1}{16}D^4} \\ & 0+\frac{1}{16}D^4 \end{array}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}D^2\right)(x^2+x+3)$$

$$= \left(\frac{1}{4D^2}-\frac{1}{16}\right)(x^2+x+3)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{2}\right)-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{16}x-\frac{3}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^2}{4}-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$y(x) = y_h + y_p$$

$$y(x) = ____$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2 طريقة المعاملات غير المعينة:

تستخدم هذه الطريقة فقط من أجل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة ومن أجل أشكال خاصة لـ $R(x)$

ملاحظة: إذا كانت المعادلة ليست ذات أمثال ثابتة أو $R(x)$ ليست أشكال خاصة نطبق الغرائي.

ملاحظة: في هذه الطريقة نفرض أن الحل الخاص من شكل الطرف الثاني، لكن إذا كان أي حد من الحل المفروض يحقق النظرين الثوابت المضروبة فيه هو أيضاً حد في الحل العام للمعادلة المتجانسة فإننا نضرب الحل المفروض بـ x^k وقد k حسب كل حالة من الأشكال الخاصة لـ $R(x)$:

(1) $R(x) = P_n(x)$

عندها نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_p = A_n x + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A x + A_0$$

حيث $A_i, i = \overline{0,n}$

الثوابت يطلب تعيينها وذلك بالاشتقاق والتعويض في المعادلة والمطابقة بين أمثال x من الدرجات المختلفة.

(2) الحالة الخاصة:

ملاحظة: إذا كان $m=0$ جذراً للمعادلة المميزة مكرراً k مرة نبحث عن حل خاص:

$$y_p = x^k (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0)$$

نشتق ونعوض ونطابق الثوابت.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $y'' - y' - 2y = 4x^2$ أي أن:

$m^2 - m - 2 = 0$

$m_1 = -1 \quad m_2 = 2$

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

$y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$

-2	$y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$
-1	$y'_p = 2A_2x + A_1$
1	$y''_p = 2A_2$
$+$	$-2A_2x^2 - 2A_1x - 2A_0 - 2A_2 - A_1 + 2A_2 = 4x^2$

بالمطابقة:

x^{2}: $-2A_2 = 4$

x^{1}: $-2A_1 - 2A_2 = 0$

x^{0}: $-A_1 + 2A_2 - 2A = 0$

$A_2 = -2 \Leftarrow A_1 = +2 \Leftarrow A_0 = -3$

$y_p = -2x^2 + 2x - 3$

$y(x) = y_h + y_p$

$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$

② $y^{(5)} + 2y^{(4)} = 10x + \frac{1}{2}$

$m^5 + 2m^4 = 0$

$m^4(m+2) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$m = 0$ يكرر 4 مرات

$m_2 = -2$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-2x}$$

0	$y_p = x^4 (A_1 x + A_0) = A_1 x^5 + A_0 x^4$
0	$y_p' = 5A_1 x^4 + 4A_0 x^3$
0	$y_p'' = 20A_1 x^3 + 12A_0 x^2$
0	$y_p''' = 60A_1 x^2 + 24A_0 x$
2	$y^{(4)} = 120A_1 x + 24A_0$
1	$y^{(5)} = 120A_1$
+	$240A_1 x + 48A_0 + 120A_1 = 10x + \frac{1}{2}$

بالطابقة

$x^1 = 240A_1 = 10$

$x^0 = 48A_0 + 120A_1 = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{24}$ $\Leftarrow$ $A_0 = \frac{-9}{96}$

$$y_p = \frac{1}{24} x^5 - \frac{9}{96} x^4$$

$y = y_h + y_p$

$y =$ ـــــــ

انتهى الطابق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960