كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

[1] $y'' + 2y' - y = 0$

$m^2 + 2m - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow 2\sqrt{2}$

$m_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$

$m_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$

$y = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}$

[2] $y'' + y' + y = 0$

$m^2 + m + 1 = 0$

$\Delta = -3$

$m_{1,2} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$

$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

[3] $y'' + 4y' + 4y = 0$

$m^2 + 4m + 4 = 0$

$\Delta = 0$

$m_1 = m_2 = -2 \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

TEL:0931497960 - (كلية العلوم (جامعة طرطوس) - مكتبة A to Z

حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة من الرتبة n :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفرض أنه لها حل من الشكل $y = e^{mx}$ فتكون المعادلة المميزة :

$$m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

معادلة جبرية حلها نحل على $m_1, m_2, \dots, m_n$

* نميز الحالات :

1. إذا كانت $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \dots \neq m_n$ حقيقية

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

2. إذا كان بين الجذور حقيقية وأحد الجذور بكرة K مرة :

$$m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$$

$$m_{k+1} \neq \dots \neq m_n$$

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) e^{mx} + C_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

3. إذا كانت الجذور :

$$m_{1,2} = \alpha_1 \mp i\beta \,,\; m_{3,4} = \alpha_2 \mp i\beta_2 \,, \dots \,, m_{n-1,n} = \alpha_{\frac{n}{2}} \mp \beta_{\frac{n}{2}}$$

$$y = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos\beta_1 x + C_2 \sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(C_3 \cos\beta_2 x + C_4 \sin\beta_2 x) + \dots + e^{\alpha_n x}(C_{n-1} \cos\beta_{\frac{n}{2}} x + C_n \sin\beta_{\frac{n}{2}} x)$$

4. إذا كانت جذر المعادلة المميزة بكرة

$$m_1 = m_2 = m_3 = m \quad \text{(حقيقية مكررة)}$$

$$m_{4,5} = m_{6,7} = m_{8,9} = \alpha + i\beta$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{mx} + e^{\alpha x}[(C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\cos\beta x + (C_7 + C_8 x + C_9 x^2)\sin\beta x]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال الحل

[1] $y^3 + 2y'' - 3y' = 0$

$m^3 - 2m^2 - 3m = 0$

$m(m^2 - 2m - 3) = 0$

إما $m = 0$

أو $m^2 - 2m - 3 = 0$

$(m+3)(m-1) = 0$

أو $m = -3$

أو $m = 1$

$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x}$

[2] $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

$m^6 + 3m^4 + 3m^2 + 1 = 0$

$(m^2+1)^3 = 0$

$m = \pm i$ جذر ثلاثي مرات

$y(x) = [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\sin x]$

[3] $(D-2)^3 (D+1)(D+2) y = 0$

حل المعادلة المميزة $\phi(m) = 0$

$(m-2)^3 (m+1)(m+2) = 0$

$m = 2$ جذر ثلاثي مرات

$m = -1$, $m = -2$

$\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^3) e^{2x} + C_4 e^{-x} + C_5 e^{-2x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

[4] $(D^3-1)(D-1)^2 y = 0$

$(m^3-1)(m-1)^2 = 0$

$m^3-1=0 \Rightarrow (m-1)(m^2+m+1)=0$

$m_1 = 1$

أو $m^2+m+1=0$

$\Delta = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$

$m_{2,3} = \frac{\pm i\sqrt{3}-1}{2}$

$(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_4 = m_5 = 1$

$m_1 = m_2 = m_3 = 1 \quad , \quad m_{4,5} = \frac{\pm i\sqrt{3}-1}{2}$

$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

[5] $(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$

$m^3 - 3m^2 + 9m + 13 = 0$

نقسم هذه المعادلة على $(m+1)$ ذلك أنه:

$(m+1)(m^2 - 4m + 13) = 0$

$m_1 = -1$

$m_{2,3} = 2 \mp 3i$

$y = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x) \quad \dots (1)$$

حيث $a_1, \dots, a_n$ ثوابت

$$\phi(D)y = R(x) \quad \dots (2)$$

$$\phi(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

وهي المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة

نظرية:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\{y(x)\}$ الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة هو أن يكتب على شكل مجموع حلين الحل العام للمعادلة المتجانسة وحل خاص للمعادلة غير المتجانسة

البرهان:

$\Leftarrow$: $y(x)$ الحل العام لغير المتجانسة.

بفرض y_p حل لـ (2)

لنبرهن أن $y - y_p$ هو حل للمعادلة المتجانسة

بما أن y حل لـ (2) $\Leftarrow \phi(D)y = R(x)$

y_p حل لـ (2) $\Leftarrow \phi(D)y_p = R(x)$

$$\phi(D)(y - y_p) = 0$$

$\Leftarrow$ حل المتجانسة هو $y - y_p$

$$y_h = y - y_p \Rightarrow y(x) = y + y_p$$

$\Rightarrow$: $y = y_h + y_p$

لنبرهن أن y هو حل لغير المتجانسة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\phi(D)(y_h) = 0$

$\phi(D) y_p = R(x)$

$\phi(D)(y_h + y_p) = R(x)$

$y = y_h + y_p$ ⇐ (2) حل لغير المعادلة $y_h + y_p$ ⇐

نتيجة: لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

1) نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة بطرق سابقة.

2) نبحث عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة وهناك ثلاث طرق لها:

1- طريقة المؤثر العكسي.

2- طريقة المعاملات غير المعينة

3- طريقة لاغرانج.

(1) طريقة المؤثر العكسي:

y_p حل خاص للمعادلة (2) ⇐ $\phi(D) y_p = R(x)$

$y_p = \underbrace{\frac{1}{\phi(D)}}_{\text{المؤثر العكسي}} R(x)$

~~x~~ خواص المؤثر العكسي: $\frac{1}{\phi(D)}$:

1) $\frac{1}{D}(f(x)) = \int f(x)\,dx$

أي $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة لـ x

$\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة لـ x ، k مرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) $\frac{1}{\phi(D)} e^{ax} = \frac{1}{\phi(a)} e^{ax}$; $\phi(a) \neq 0$

3) $\frac{1}{\phi(D^2)} \cos(ax+b) = \frac{1}{\phi(-a^2)} \cos(ax+b)$

$\frac{1}{\phi(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{\phi(-a^2)} \sin(ax+b)$

$\phi(-a^2) \neq 0$ بشرط

4) $\frac{1}{\phi(D)} e^{ax} u(x) = \frac{1}{\phi(D+a)} u(x) e^{ax}$

5) $\frac{1}{\phi(D)} (f_1(x) + f_2(x)) = \frac{1}{\phi(D)} f_1(x) + \frac{1}{\phi(D)} f_2(x)$

6) $\left(\frac{1}{\phi_1(D)} + \frac{1}{\phi_2(D)}\right) f(x) = \frac{1}{\phi_1(D)} f(x) + \frac{1}{\phi_2(D)} f(x)$

7) $\left(\frac{1}{\phi_1(D)} \cdot \frac{1}{\phi_2(D)}\right) f(x) = \frac{1}{\phi_1(D)} \left(\frac{1}{\phi_2(D)} f(x)\right) = \frac{1}{\phi_2(D)} \left(\frac{1}{\phi_1(D)} f(x)\right)$

8) $f(D) \cdot \frac{1}{\phi(D)} f(x) = f(D) \left(\frac{1}{\phi(D)} f(x)\right) = \frac{1}{\phi(D)} \left(f(D) f(x)\right)$

9) $\frac{1}{\phi(D)} c = \frac{c}{\phi(0)}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة