كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تابع المحاضرة السابقة:

8- المعادلات المتجانسة بالنسبة لـ x, y وما:

نقول عن المعادلة إنها متجانسة بالنسبة لـ x, y وما إذا بدلنا كل

x بـ λx و كل y بـ λy

وكل y' بـ y''

$\frac{y''}{\lambda}$ بـ y''

$\frac{y''}{\lambda^2}$ بـ y'''

⋮

$\frac{y^{(n)}}{\lambda^{n-1}}$ بـ $y^{(n)}$ فتصبح المعادلة:

$$F\left(\lambda x, \lambda y, y', \frac{y''}{\lambda}, \frac{y'''}{\lambda^2}, \dots, \frac{y^{(n)}}{\lambda^{(n-1)}}\right)$$

$$= \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

نفرض: $\lambda = \frac{1}{x}$ $\Leftarrow$

$$F\left(1, \frac{y}{x}, y', xy'', \dots, x^{n-1}y^{(n)}\right) = 0$$

نفرض $z = \frac{y}{x}$

مثال:

$$x^2y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$$

متباينة بالنسبة لـ x و y بما يلي:

$$xy'' = \left(\frac{y}{x} - y'\right)\left(\frac{y}{x} - y' - 1\right)$$

نفرض $z = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = xz' + z$$

$$y'' = 2z' + xz''$$

$$\Rightarrow xy'' = 2xz' + x^2 z''$$

نعوض:

$$2xz' + x^2 z'' = (z - xz - z)(z - xz - z + 1)$$

$$2xz' + x^2 z'' = (-xz)(-xz + 1)$$

$$x^2 z'' = x^2 z'^2 - xz' - 2xz'$$

$$x^2 z'' + 2xz' - x^2 z'^2 - xz' = 0$$

نفرض $e^t = x$

يصبح متباينة بالنسبة لـ t

وهكذا من المتحول t.

الحل العام:

$$y = -x \ln(-c_1 \ln x - c_2)$$

المحاضرة الثامنة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة العليا:

نقول عن معادلة تفاضلية من المرتبة n أنها خطية إذا كان:

$y, y', \dots, y^{(n)}$

من الدرجة الأولى والتي هي مشتقات $y, y', y'', \dots$ وتكتب بالشكل:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}xy' + a_n(x)y = R(x)$$

إذا كانت جميع الأمثال ثوابت سميت المعادلة خطية ذات أمثال ثابتة أما إذا كانت واحدة على الأقل من الأمثال تابعة لـ x سميت المعادلة ذات أمثال متغيرة.

- إذا كان $R(x)=0$ تسمى المعادلة ★ بالخطية متجانسة.
- إذا كان $R(x)\neq 0$ تسمى المعادلة ★ بالخطية غير المتجانسة

تعريف المؤثر التفاضلي D:

نعرف $D = \frac{d}{dx}$ (المشتق الأول بالنسبة لـ x)

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ المشتق الثاني بالنسبة لـ (x)

$$D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$$

$$\vdots$$

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

$$D^n y + a_1(x)D^{n-1}y + \dots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y = R(x)$$

$$(D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x))y = R(x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\phi(D) = D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$$

★ تكتب المعادلة التفاضلية من الدرجة n بالشكل:

$$\phi(D)y = R(x)$$

وهي المعادلة الخطية غير المتجانسة.

$$\phi(D)y = 0$$

المعادلة الخطية المتجانسة.

★ بعض خواص العامل التفاضلي:

① $\phi(D)e^{ax} = \phi(a)e^{ax}$

② $\phi(D^2)\cos ax = \phi(-a^2)\cos ax$

$\phi(D^2)\sin ax = \phi(-a^2)\sin ax$

③ $\phi(D)e^{ax}u(x) = e^{ax}\phi(D+a)u(x)$

④ $\phi(D)(f_1(x)+f_2(x)) = \phi(D)f_1(x) + \phi(D)f_2(x)$

⑤ $[\phi_1(D)+\phi_2(D)]f(x) = \phi_1(D)f(x) + \phi_2(D)f(x)$

⑥ $(\phi_1(D)\cdot\phi_2(D))f(x) = \phi_1(D)[\phi_2(D)f(x)]$
$= \phi_2(D)[\phi_1(D)f(x)]$

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = R(x) \quad \dots(1)$$

معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة

إذا كانت $R(x)=0$ تكتب المعادلة:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \dots(2)$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية ①: إذا كان $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلين خاصين من المعادلة المتجانسة ② فإن التركيب الخطي $(c_1y_1+c_2y_2)$ لهذين الحلين هو أيضاً حل للمعادلة ②

البرهان:

$y_1(x)$ حل لـ (2) $\Leftarrow$ يحقق المعادلة أي:

$$\xrightarrow{\times c_1} y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$$

$y_2(x)$ حل لـ (2) $\Leftarrow$

$$\xrightarrow{\times c_2} y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$$

$$(c_1y_1+c_2y_2)'' + a_1(x)(c_1y_1+c_2y_2)' + a_2(x)(c_1y_1+c_2y_2) = 0$$

$\Leftarrow c_1y_1+c_2y_2$ تحقق المعادلة (2) بالتالي هي المطلوب

(التركيب الخطي للحلين هو حل)

وهذه النظرية غير محققة للمعادلات غير الخطية والخطية غير المتجانسة.

محدد رونسكي:

y_1, y_2 دالتان بمتغير على مجال ما وقابلتان للاشتقاق:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

نظرية ②: الشرط اللازم والكافي لكي يكون y_1, y_2 مرتبطين خطياً أن يكون معين رونسكي لهما معدوم على كامل مجال التعريف وإذا كان معين رونسكي غير معدوم على الأقل في نقطة من مجال التعريف عندئذٍ فإن y_1, y_2 مستقلين خطياً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية (3): إذا كانت a_1, a_2 توابع مستمرة فإنّه يوجد y_1, y_2 حلين مستقلين خطياً للمعادلة (2) التماثلية وكل حل للمعادلة (2) يمكن أن يوضع على شكل تركيب خطي لهذين الحلين y_1, y_2

نتيجة: بمعرفة حلين خاصين y_1, y_2 مستقلين خطياً لـ (2) يكون الحل العام للمعادلة (2) على شكل تركيب خطي لـ y_1, y_2

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(نقطة على التماثلية).

المعادلة التفاضلية الخطية التماثلية من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة:

الشكل العام لهذه المعادلات:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \cdots (3)$$

حيث a_1, a_2 ثوابت (توابع اختيارية) وبالتالي حسب النظرية (3) فإنّه يوجد حلين مستقلين خطياً للمعادلة ذات الأمثال الثابتة

ولإيجاد هذين الحلين نلاحظ أنّ هذه المعادلة هي علاقة خطية بين y, y', y'' والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه العلاقة هي الدالة الأسية e^{Mx}

وذلك من أجل قيمة لـ M

لتكن M نعوض في المعادلة (3)

$$y = e^{Mx}$$

$$y' = M e^{Mx}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y'' = m^2 e^{mx}$

$m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_2 e^{mx} = 0$

$(m^2 + a_1 m + a_2) \underbrace{e^{mx}}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \quad ---(4)$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية نسميها المعادلة المميزة للمعادلة الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة (3)

نميز الحالات الآتية:

(1) جذرا ن حقيقيان مختلفان m_1, m_2

$a_1^2 - 4a_2 > 0$

حلين خاصين للمعادلة المتجانسة $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}$

$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) \neq 0$

$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

(2) الجذران المقديان المتر افقان:

$a_1^2 - 4a_2 < 0$

$m_{1,2} = \alpha \mp i\beta$

حلان مستقلان خطيا $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}$ حل عام غير معدوم

$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$

$= e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x})$

نتذكر: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x$

$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \sin\beta x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y(x) = C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x} = [(C_1+C_2)\cos\beta x + i(C_1-C_2)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

(3) إذا كانت $m = m_1 = m_2 = -\frac{a_1}{2}$

هذه حالة خاصة

$$a_1^2 - 4a_2 = 0$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

قاسمة بالنسبة لـ y ومشتقاتها

نقسم كل معادلة على y:

$$\frac{y''}{y} + a_1\frac{y'}{y} + a_2 = 0$$

نفرض $\frac{y'}{y} = \xi$

$$\frac{y''}{y} = \xi' + \xi^2$$

نعوض:

$$\xi' + \xi^2 + a_1\xi + a_2 = 0$$

$$\xi' + (\xi - m)^2 = 0$$

معادلة مرتبة الأولى نفصل متغيراتها

$$\frac{-d\xi}{(\xi-m)^2} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi - m} = x + C_1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{x+c_1} = m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+c_1} + m = \frac{dy}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x+c_1} + m\right) dx$$

$$\ln y = \ln(x+c_1) + \ln e^{mx} + \ln c_2$$

بتخلص من اللوغاريتم:

$$y = c_2 e^{mx}(x+c_1) = (c_2 x + c_1 c_2) e^{mx}$$

$$\tilde{A} \quad \tilde{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (Ax+B)e^{mx}}$$

تنبيه: ناقش حالة المعادلة ذات الأمثال الثابتة:

كل معادلة تفاضلية خطية قياسية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

نكتب المعادلة المميزة:

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

- إذا كان $\Delta > 0 \Leftarrow$ توجد جذران حقيقيان m_1, m_2

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا كانت $\Delta < 0$ ⇐ يوجد جذران عقديان مترافقان

$$m_{1,2} = \alpha \mp i\beta$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

- إذا كان $\Delta = 0$ جذر مضاعف

$$m = m_1 = m_2$$

$$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{mx}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z