كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا:

تعريف: نسمي كل معادلة تحوي على متحول مستقل x وتابع y ومشتقات هذا التابع الأعلى من الأولى بمعادلة تفاضلية ذات المراتب العليا $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ معادلة تفاضلية من المرتبة n قد تخفض مرتبتها.

بعض أشكال هذه المعادلات:

[1] المعادلة المحلولة بالنسبة لـ $y^{(n)} = f(x)$ تحل بأخذ تكامل الطرفين n مرة على التالي وحلها يحوي n ثابت اختياري.

مثال:
$$y''' = \cos x$$
$$\Rightarrow y'' = \sin x + C_1$$
$$y' = -\cos x + C_1 x + C_2$$
$$y = -\sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

[2] المعادلة المحلولة بالنسبة لـ $x = f(y^{(n)})$ تحل بفرض $(y^{(n)}) = t$ عندئذ

$$x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)\,dt$$
$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx = t\,f'(t)\,dt$$
$$dy^{(n-1)} = t\,f'(t)\,dt$$

نكامل هذه المعادلة فنجد أن:

$$y^{n-1} = \int t\, f'(t)\, dt + C_1$$

$$d\, y^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \left(\int t\, f'(t)\, dt \right) f'(t)\, dt$$

وهكذا

مثال: $x = 3y''^2 + y'' + 1$

نفرض $y'' = t$

$$x = 3t^2 + t + 1$$

$$dx = (6t+1)\, dt$$

$$\Rightarrow d(y') = y''\, dx = t(6t+1)\, dt$$

$$d(y') = (6t^2 + t)\, dt$$

نكامل نجد أن:

$$y' = 2t^3 + \frac{t^2}{2} + C_1$$

$$dy = y'\, dx = \left(2t^3 + \frac{t^2}{2} + C_1\right)(6t+1)\, dt$$

$$= \left(12t^4 + 2t^3 + 3t^3 + \frac{t^2}{2} + 6C_1 t + C_1\right) dt$$

نكامل:

$$y = \frac{12}{5} t^5 + \frac{5t^4}{4} + \frac{t^3}{6} + 3C_1 t^2 + C_1 t + C_2$$

فيكون الحل العام مكتوب بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + t + 1 \\ y = \frac{12}{5} t^5 + \frac{5}{4} t^4 + \frac{t^3}{6} + 3C_1 t^2 + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

3) المعادلة الخالية من التابع y:

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

لحل هذا النوع نفرض أن $y' = z$ وذلك لتخفيض مرتبتها:

$$y' = z \Rightarrow y'' = z' \Rightarrow y''' = z'' \cdots y^{(n)} = z^{(n-1)}$$

تصبح المعادلة من الشكل:

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

مثال:

$$x^2 y'' = y'^3$$

نفرض $y' = z \Leftarrow y'' = z'$ تصبح المعادلة بالشكل

$$x^2 z' = z^2$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{-1}{z} = \frac{-1}{x} - C_1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1$$

$$z = \frac{x}{1 + C_1 x} \Rightarrow y' = \frac{x}{1 + C_1 x}$$

$$dy = \frac{x}{1 + C_1 x}\, dx$$

باستخدام القسمة الإقليدية:

$$y = \frac{1}{C_1 x} - \frac{1}{C_1} \ln(1 + C_1 x) + C_2$$

[4] المعادلة الخالية من التابع y ومشتقاتو الحتى الأولى:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

لحلها نفرض أن $y^{(k)} = z$ وبذلك نكون قد خفضنا مرتبتها

$$y^{(k)} = z \Rightarrow y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

تصبح المعادلة بالشكل:

$$f(x, z, z', \ldots, z^{n-k}) = 0$$

مثال:

$$y''' = y''^2$$

نفرض أن $y'' = z \Leftarrow y''' = z^2$

تصبح المعادلة بالشكل:

$$z' = z^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{dz}{dx}} \frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z} = -x + C_1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{-x + C_1} \Rightarrow y'' = \frac{1}{-x + C_1}$$

$$\Rightarrow dy' = \frac{1}{-x + C_1} \Rightarrow y' = -\ln|-x + C_1| - \ln C_2$$

$$y' = -\ln|C_2(-x + C_1)|$$

نكامل بالتجزئة:

$$y = -x\ln|C_2(-x + C_1)| + x + C_1 \ln|-x + C_1| + C_3$$

$\boxed{5}$ المعادلة الخالية من المتحول المستقل x:

$$f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

لتخفيض مرتبتها نفرض y متحول مستقل ونفرض $y' = z$

فيكون لدينا:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(z'_y\, z)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (z''_y \cdot z + z'^2_y)\, z$$

$$y''' = z^2 \cdot z''_y + z \cdot z'^2_y$$

وهكذا تصبح المعادلة بالشكل:

$$F(y, z, z'_y, z''_y, \dots, z^{(n-1)}_y) = 0$$

مثال

$$y''' \cdot y'^2 = y''^2$$

نفرض y متحول مستقل ونفرض $y' = z$

$$y'' = z \cdot z'_y \quad , \quad y''' = z^2 \cdot z''_y + z \cdot z'^2_y$$

نعوض:

$$(z^2 \cdot z''_y + z \cdot z'^2_y)(z^2) = (z^3 \cdot z'^3_y)$$

$$z^4 \cdot z''_y + z^3 \cdot z'^2_y = z^3 \cdot z'^3_y$$

نقسم على $z^3 \neq 0$

$$z \cdot z''_y + z'^2_y = z'^3_y$$

وهي معادلة خالية من المتحول المستقل y نفرض z متحول مستقل و $u = z'_y$ التابع.

$$z''_y = u \cdot u_z$$

$$z(u \cdot u'_z) + u^2 = u^3$$

نقسم على $u \neq 0$

$$z \cdot u'_z + u = u^2$$

$$u'_z + \frac{1}{z} u = \frac{1}{z} u^2$$

معادلة برنولي: نقسم على u^2 فنجد أنّ:

$$u'_z \cdot u^{-2} + \frac{1}{z} u^{-1} = \frac{1}{z}$$

نفرض أن $v = u^{-1} \Leftarrow$

$$v'_z = -u^{-2} u'_z$$

$$-v'_z + \frac{1}{z} v = \frac{1}{z} \Rightarrow v'_z - \frac{1}{z} v = \frac{-1}{z}$$

$$\mu = e^{\int \frac{-1}{z} dz} = \frac{-1}{z}$$

$$v_z = z\left(C_1 + \int \frac{-1}{z^2} dz\right) = z\left(C_1 + \frac{1}{z}\right)$$

$$v_z = zC_1 + 1$$

$$u_z = \frac{1}{v_z} = \frac{1}{C_1 z + 1} \Rightarrow z'_y = \frac{1}{C_1 z + 1}$$

$$(C_1 z + 1) dz = dy$$

$$\frac{C_1}{2} z^2 + z = y + C_2$$

$$\frac{C_1}{2} y'^2 + y' = y + C_2$$

معادلة من المرتبة الأولى و الدرجات العليا محلولة بالنسبة لـ y:

$$y = \frac{C_1}{2} y'^2 + y' - C_2$$

نفرض $y' = p$

$$\boxed{y = \frac{C_1}{2} p^2 + p - C_2} \quad \cdots \text{(1)}$$

نشتق بالنسبة لـ x:

$$p = y' = (C_1 p + 1) \frac{dp}{dx}$$

$$dx = \frac{c_1 p + 1}{p}\, dp$$

$$\boxed{x = c_1 p + \ln|p| + c_3} \quad \text{--- } (2)$$

ومنه تكون المعادلتين (1) و (2) تشكلان الحل العام بالشكل الوسيطي بدلالة الوسيط p.

6 المعادلة المتجانسة بالنسبة لـ y ومشتقاتها.

تكون المعادلة متجانسة بالنسبة لـ y ومشتقاتها إذا بدلنا كل y بـ λy وكل y' بـ $\lambda y'$ وكل y'' بـ $\lambda y''$ و ... وكل $y^{(n)}$ بـ $\lambda y^{(n)}$ وحصلنا على:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, \ldots, y^{(n)})$$

بما أنها متجانسة بالنسبة لـ y ومشتقاتها فمنها يكون:

$$\lambda = \frac{1}{y}$$

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

لتخفيض مرتبتها نفرض أن:

$$\frac{y'}{y} = z$$

$$\Rightarrow y' = z \cdot y \Rightarrow y'' = z' \cdot y + z \cdot y'$$

$$y'' = y \cdot z' + z \cdot y' \Rightarrow \boxed{\frac{y''}{y} = z' + z^2}$$

$$y''' = z'' \cdot y + 2 z' \cdot y' + z y''$$

$$\frac{y'''}{y} = z'' + 2 z \cdot z' + z(z' + z^2)$$

$$\frac{y'''}{y} = z'' + 3z \cdot z' + z^3$$

فتصبح المعادلة بالشكل :

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

مثال :

$$y \cdot y'' = y'^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2$$

نفرض $z = \frac{y'}{y}$

$$z' + z^2 = (z)^2 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z = C_1$$

$$\frac{y'}{y} = C_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx$$

$$\boxed{y = C_2 e^{C_1 x}}$$

7) المعادلة المتجانسة بالنسبة لـ x :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

وتكون متجانسة بالنسبة لـ x إذا بدلنا كل :

x بـ λx

x' بـ y

y' بـ $\frac{y'}{\lambda}$

y'' بـ $\frac{y''}{\lambda^2}$

$\vdots$

$y^{(n)}$ بـ $\frac{y^{(n)}}{\lambda^n}$

ومحققة على:

$$F\left(\lambda x, y, \frac{y'}{\lambda}, \frac{y''}{\lambda^2}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{\lambda^n}\right) = \lambda^k F(x, y, \ldots, y^{(n)})$$

عندها لاستنتاج القوانين نفرض $\lambda = \frac{1}{x}$

$$f(1, y, xy', x^2y'', \ldots, x^n y^{(n)}) = 0$$

وهو شكل المعادلة المتجانسة بالنسبة لـ x

نفرض $x = e^t \Leftarrow t = \ln|x|$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy' = y'_t$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{d\left(y'_t \cdot \frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{y'_t}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) y'_t$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{y''_t}{x^2} - \frac{y'_t}{x^2} \Rightarrow x^2 y'' = y''_t - y'_t$$

$$x^3 y''' = y'''_t - 3y''_t + 2y'_t$$

تصبح المعادلة بالشكل:

$$f(y, y'_t, y''_t, \ldots, y^{(n)}_t) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من مراتب عليا خالية من المتحول المستقل t.

مثال

$$x\cdot y'^2 + xy\cdot y'' = 2y\cdot y'$$

نضرب بـ x

$$(x\cdot y')^2 + x^2 y'' y = 2yxy'$$

معادلة متجانسة بالنسبة لـ x لحلها نفرض أن $x = e^t$

$$(y'_t)^2 + y(y''_t - y'_t) = 2yy'_t$$

$$y'^2_t + y\cdot y''_t - y\cdot y'_t = 2y\cdot y'_t$$

$$y'^2_t + y\cdot y''_t - 3yy'_t = 0$$

معادلة خالية من المتحول المستقل t نفرض أن $y'_t = z$ و y متحول مستقل

$$y''_t = z_y\cdot z$$

$$z^2_y + y(z'_y\cdot z_y) - 3yz_y = 0$$

نقسم على $z_y \neq 0$

$$y\cdot z'_y + z_y = 3y$$

$$z'_y + \frac{1}{y} z_y = 3$$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

$$z_y = \frac{1}{y}(C_1 + \int 3y\,dy) = \frac{C_1}{y} + \frac{3}{2}y$$

$$y'_t = \frac{C_1}{y} + \frac{3}{2} y$$

$$\frac{dy}{\frac{C_1}{y} + \frac{3}{2} y} = dt \Rightarrow \frac{dy}{\frac{2C_1 + 3y^2}{2y}} = dt$$

$$\frac{2y}{2C_1 + 3y^2} dy = dt$$

$$3y^2 + 2C_1 = C_2 e^{3t}$$

$$3y^2 + 2C_1 = C_2 x^3$$

انتهت المحاضرة