كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجات العليا:

الشكل العام لهذه المعادلات هو $F(x,y,y')=0$ ---(1)

نفرض أن $y'=p$ تصبح المعادلة: $F(x,y,p)=0$ ---(2)

إذا كانت درجة p أكبر من الواحد فإن المعادلة التفاضلية تكون من المرتبة الأولى والدرجات العليا، لذلك نحاول أن نحول المسألة إلى معادلات من الدرجة الأولى والمرتبة الأولى.

* بعض أشكال المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجات العليا:

تكتب المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجات العليا بالشكل:

$$f_n(x,y)p^n+f_{n-1}(x,y)p^{n-1}+\dots+f_1(x,y)p+f_0(x,y)=0 \quad ---(3)$$

1) المعادلة (3) تكتب على شكل كثير حدود من الدرجة n يمكن تحليلها إلى n من العوامل الخطية لتصبح بالشكل:

$$(p-f_1(x,y))(p-f_2(x,y))\dots(p-f_n(x,y))=0 \quad ---(4)$$

وبالتالي نحصل على n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى نحلها باستخدام الطرق التي تعلمناها سابقاً.

$$\frac{dy}{dx}=p=f_1(x,y)\xrightarrow{\text{حلها}} g_1(x,y,c)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=p=f_2(x,y)\xrightarrow{\text{حلها}} g_2(x,y,c)=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy}{dx}=p=f_n(x,y)\Rightarrow g_n(x,y,c)=0$$

وبالتالي يكون الحل العام لـ (4) هو الجداء:

$$g_1(x,y,c)\,g_2(x,y,c)\,g_3(x,y,c)\ \cdots\ g_n(x,y,c)=0$$

وهنا نستخدم نفس الثابت لأنّ المعادلة من المرتبة الأولى

وبالتالي الحل العام لها يجب أن يحوي ثابت اختياري واحد:

مثال: $y.y'^2-(1+2xy)y'+2x=0$

نفرض أنّ: $y'=p$

$$y.p^2-(1+2xy)p+2x=0$$

$$\Delta=\left(-(1+2xy)\right)^2-4(2x)(y)$$

$$=1+4xy+4x^2y^2-8xy$$

$$=1-4xy+4x^2y^2$$

$$\Delta=(1-2xy)^2$$

$$p_1=\frac{1+2xy+1-2xy}{2y}=\frac{1}{y}$$

$$p_2=\frac{1+2xy-1+2xy}{2y}=2x$$

$$\left(p-\frac{1}{y}\right)(p-2x)=0$$

إما $p-\frac{1}{y}=0 \Rightarrow y'=\frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{y^2-2x+c=0}$

أو $p-2x=0 \Rightarrow y'=2x \Rightarrow y=x^2-c$

$$\Rightarrow \boxed{y-x^2+c=0}$$

$$(y^2-2x+c)(y-x^2+c)=0$$

2 المعادلة حلول بالنسبة لـ x:

$$x = f(y, y') \quad \dots (5)$$

ونفرض $z = y' = p$

$$x = f(y, p) \quad \dots (6)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة لـ y:

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى نحلها بطرق سابقة.

$$\phi(y, p, c) = 0 \quad \dots (7)$$

وبالتالي يكون الحل العام مكتوب بالشكل الوسيطي والوسيط هو p

مثال: $y = 2xy' - y \cdot y'^2$

نفرض $y' = p$:

$$y = 2xp - y \cdot p^2 \quad \dots (1)$$

$$x = \frac{y + yp^2}{2p}$$

بالمفاضلة بالنسبة لـ y:

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{1+p^2}{2p} + y\left(\frac{(2p)^2 - 2(1+p^2)}{4p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1+p^2}{2p} + y\left(\frac{2p^2-2}{4p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{2-1-p^2}{2p} = y\left(\frac{p^2-1}{2p^2}\right)\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1-p^2}{2p} = y\left(\frac{p^2-1}{2p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$1 = \frac{y}{p}\left(\frac{-dp}{dy}\right) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{p}} \quad \dots (2)$$

بالتالي المعادلتين ①, ② تمثلان الحل العام للمعادلة بالشكل الوسيطي.

3 المعادلة محلولة بالنسبة لـ y:

$$y = f(x, y') \quad --- \quad (8)$$

نفرض $y' = p$

$$y = f(x, p) \quad --- \quad (9)$$

بالمفاضلة بالنسبة لـ x:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى بالنسبة لـ p يكون لها حل على الشكل:

$$\phi(x, p, c) \quad --- \quad (10)$$

فتكون المعادلتين ⑨, ⑩ تمثلان الحل العام للمعادلة ⑧

مثال:

$$y = 2y'x + y'^4 x^2$$

نفرض $y' = p$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad --- \quad (1)$$

نفاضل بالنسبة لـ x:

$$\frac{dy}{dx} = p = 2p + 2p^4 x + (2x + 4p^3 x^2)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = p(1 + 2p^3 x) + 2x(1 + 2p^3 x)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = p + 2x\frac{dp}{dx} \Rightarrow 0 = \frac{dp}{p} + \frac{dx}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{2x} \Rightarrow 2\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{p^2 = \frac{c}{x}} \quad --- (2)$$

وبالتالي تكون (1),(2) هما الشكل الوسيطي للحل.

حالات خاصة للمعادلات المحلولة بالنسبة لـ y :

(a) معادلة لاغرانج :
$$y = f(y')x + g(y')$$

بفرض : $y' = p$;
$$y = f(p)x + g(p)$$

نفاضل بالنسبة لـ x :

$$p = f(p) + (f'(p)x + g'(p))\frac{dp}{dx}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى يمكن اعتبارها خطية باعتبار x التابع و p المتحول المستقل.

مثال:
$$y = 2y'x + y'^3$$

بفرض : $y' = p$
$$\boxed{y = 2px + p^3} \quad --- (1)$$

نفاضل بالنسبة لـ x :

$$p = 2p + (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$p + (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$p\frac{dx}{dp} + 2x + 3p^2 = 0$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -3p \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{2}{p}dp} = p^2$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(C + \int -3p^3\,dp\right) = \frac{1}{p^2}\left(C + \left(\frac{-3}{4}p^4\right)\right)$$

$$\boxed{x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2} \quad --- \ (2)$$

وبالتالي يكون المعادلتين (1) و (2) تمثلان الحل العام بالشكل الوسيطي.

b معادلة كليرو:

$$f(y') = y' \Rightarrow y = y'(x) + g(y')$$

بفرض $y' = p$

$$\boxed{y = px + g(p)} \quad --- \ (1)$$

نفاضل بالنسبة لـ x:

$$p = p + (x + g'(p))\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (x + g'(p))\frac{dp}{dx}$$

نقسم على $x + g'(p) \neq 0$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{p = c} \quad --- \ (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد أن:

$$y = cx + g(c)$$

حل عام، والحل الشاذ هو:

$$\begin{cases} x + g'(p) = 0 \\ y = p(x) + g(p) \end{cases}$$

مثال:

$$y = xy' + \sqrt{4 + y'^2}$$

$$y = Cx + \sqrt{4 + C^2}$$

الحل العام (ديكارتي)

الحل الشاذ:

$$\begin{cases} x + \dfrac{P}{\sqrt{4+P^2}} = 0 \\ y = Px + \sqrt{4+P^2} \end{cases}$$

تطبيقات المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

1) المسارات المتعامدة:

يفرض لدينا مجموعة المنحنيات: $F(x, y, C) = 0 \; --- (1)$

نسمي مجموعة المنحنيات التي تقطع المنحنيات (1) على التعامد بالمسارات المتعامدة وتصنع زاوية قائمة مع كل منحني من (1)

لتحديد هذه المسارات نفرض: $y' = f(x, y)$ حيث $f(x,y)$ ميل المنحنيات (1) فيكون ميل المسارات العمودية على (1) هو $\dfrac{-1}{f(x,y)}$

أي: $$y' = \frac{-1}{f(x, y)}$$

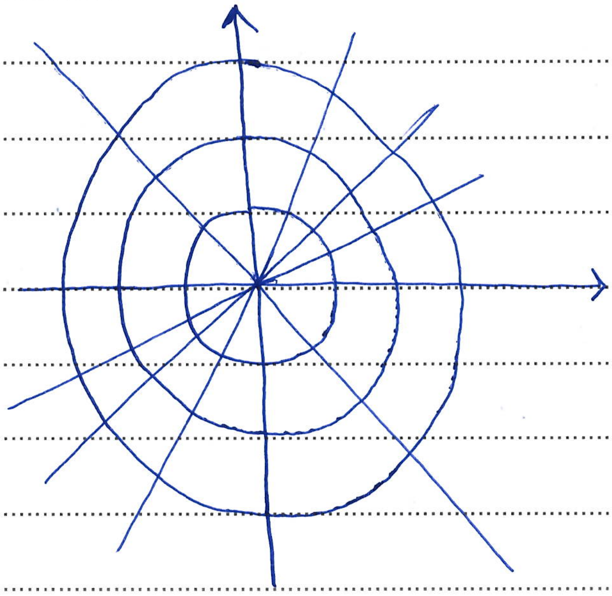
مثال:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

ميل المنحنيات المعامدة هو $\dfrac{y}{x}$

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = cx$$



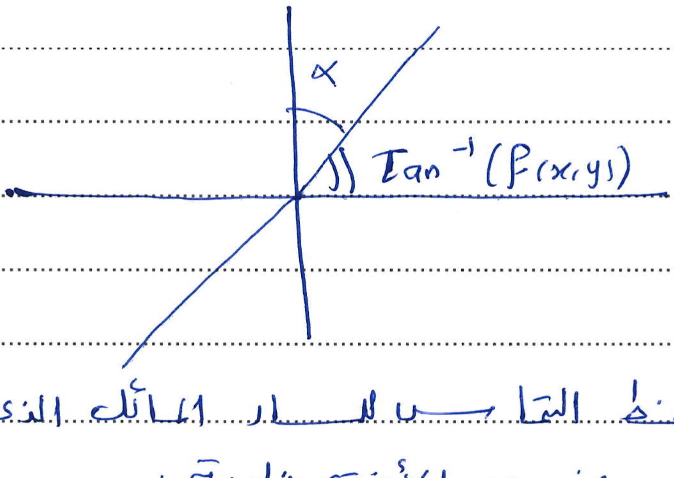
2 المسارات غير المتعامدة:

يفرض لدينا $F(x, y, c) = 0 \; --- \; (1)$

فإن المنحنيات التي تقطع (1) بزاوية $\alpha \neq 90^\circ$ تسمى منحنيات غير عمودية.

نفاضل (1) حتى نحصل على $y' = f(x, y)$

وهو ميل المنحنيات (1) عند النقطة (x, y) وبالتالي زاوية الميل عند النقطة (x, y) هي $\tan^{-1}(f(x, y))$



وبالتالي ميل المماس للمسار المائل الذي يقطع المنحنيات (1) بزاوية α يصنع مع الأفق زاوية:

$\alpha + \tan^{-1}(f(x, y))$

وبالتالي ميل هذه المنحنيات هو:

$$y' = \tan(\alpha + \tan^{-1}(f(x,y)))$$

ملاحظة:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$$

$$y' = \frac{\tan(\alpha) + f(x,y)}{1 - \tan(\alpha)\, f(x,y)}$$

مثال: أوجد المسارات التي تميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على مجموعة

المسارات: $x^2 + y^2 = c$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

$$y' = \frac{-x}{y} = f(x,y)$$

وبالتالي المعادلة التفاضلية هي:

$$y' = \frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{y - x}{y + x}$$

معادلة متجانسة.

نفرض أن $z = \frac{y}{x} \Leftarrow y = zx$

$$\Rightarrow dy = x\,dz + z\,dx$$

$$\frac{x\,dz + z\,dx}{dx} = \frac{xz - x}{xz + x} = \frac{z-1}{z+1}$$

$$x\,dz + z\,dx = \left(\frac{z-1}{z+1}\right) dx$$

$$x\,dz + \left(z - \frac{z-1}{z+1}\right) dx = 0$$

$$x\,dz + \left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)dx = 0$$

نقسم على $x\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right) \neq 0$ فينتج:

$$\frac{z+1}{z^2+1}\,dz + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{2z}{z^2+1}\,dz + \frac{2dz}{z^2+1} + \frac{2dx}{x} = 0$$

$$\ln(z^2+1) + 2\arctan z + \ln x^2 = \ln c$$

$$\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)x^2 e^{2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)} = C$$

$$x^2+y^2 = C\,e^{-2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

انتهت المحاضرة