كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال: (1) $x y' - 2y - x^3 e^x = 0$

$y' - \frac{2}{x} y = x^2 e^x$ ... (1) $\quad p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = x^2 e^x$

نحل المعادلة المتجانسة: $y' - \frac{2}{x} y = 0$

$\frac{1}{y} dy - \frac{2}{x} dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$

$\Rightarrow y_h = c e^{\int \frac{2}{x} dx} = c x^2$

$y_p = c(x) \cdot x^2 \Rightarrow y_p' = c'(x) \cdot x^2 + 2 c(x) \cdot x$

نعوض في (1):

$c'(x) \cdot x^2 + 2 c(x) \cdot x - \frac{2}{x} c(x) \cdot x^2 = x^2 e^x$

$c'(x) x^2 = x^2 e^x \Rightarrow c'(x) = e^x \Rightarrow c(x) = e^x$

$\Rightarrow y_p = x^2 e^x \Rightarrow y(x) = \underbrace{c x^2}_{y_h} + \underbrace{x^2 e^x}_{y_p}$

(2) $x y' + 5y = x^2 \Rightarrow y' + \frac{5}{x} y = x^2$

$M = e^{\int \frac{5}{x} dx} = x^5$

نضربه بكل المعادلة: $dy + \left(\frac{5}{x} y - x^2\right) dx = 0$

$x^5 dy + (5x^4 y - x^7) dx = 0$

$(x^5 dy + 5x^4 y dx) + (-x^7 dx) = 0$

$x^5 y + \frac{x^8}{8} = c$

6) المعادلات التي يمكن أن تتحول إلى خطية:

a- المعادلات الخطية باعتبار x تابع و y هو المتحول المستقل

شكلها: $\frac{1}{y} + P(y)x = Q(y)$

أو

$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ ، $\left(xf(y) + g(y)\right)\frac{dy}{dx} = h(y)$

مثال:

$y\,dx + (2x + xy - 4)\,dy = 0$

$\frac{dx}{dy} + \frac{2+y}{y}x = \frac{4}{y}$

ونكمل الحل.

b- معادلة برنولي: $y' + P(x)y = q(x)y^n$; $n \neq 0, 1$

$n=0$ خطية برضاحة ، $n=1$ خطية متجانسة

نقسم على y^n $\longrightarrow$ $y'.y^{-n} + P(x)y^{1-n} = q(x)$

نضع: $z = y^{1-n}$ $\longrightarrow$ $z' = (1-n)y'.y^{-n}$

$y'y^{-n} = \frac{z'}{1-n}$

$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = q(x)$ نحوّلها لـ Q

مثال:

$y' + 2xy = xy^3$

$y'.y^{-3} + 2xy^{-2} = x$

نضع: $z = y^{-2}$ $\longrightarrow$ $z' = -2y'.y^{-3}$ $\Rightarrow$ $y'.y^{-3} = -\frac{1}{2}z'$

نحوّلها: $-\frac{1}{2}z' + 2xz = x$

$z' - 4xz = -2x$

ونكمل الحل ونكون $z = ce^{2x^2} + \frac{1}{2}$

$y^{-2} = ce^{2x^2} + \frac{1}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

c- معادلة دارجو: $M_{(x,y)}\,dx + N_{(x,y)}\,dy + f(x,y)(x\,dy - y\,dx) = 0$

حيث: M و N توابع متجانسة ومن نفس الدرجة k

و $f(x,y)$ تابع متجانس من الدرجة m حيث $m \neq k-1$

نحرر من $\frac{y}{x}$ نرد الى بريولي باعتبار x تابع

مثال: $y(y-x)\,dx + x^2\,dy + x^3(x\,dy - y\,dx) = 0$

نحرر من $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z\,x \Rightarrow dy = z\,dx + x\,dz$

نعوض: $x z(xz - x)\,dx + x^2(x\,dz + z\,dx) + x^3(x^2\,dz) = 0$

$z^2\,dx + (x + x^3)\,dz = 0$ ... (1)

$\frac{dx}{dz} + \frac{x + x^3}{z^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dz} + \frac{1}{z^2}x = -\frac{1}{z^2}x^3$

معادلة بريولي باعتبار x تابع

$z^2\,dx + (x + x^3)\,dz = 0$ ... (2)

$\frac{dx}{x + x^3} + \frac{dz}{z^2} = 0$

$x = \left(c\,e^{-2\frac{x}{y}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$

d- معادلة ريكاتي: $y' + P(x)y^2 + q(x)y + R(x) = 0$

اذا كان: $R(x) = 0 \Rightarrow$ معادلة برنولي

$P(x) = 0 \Rightarrow$ خطية غير متجانسة.

يمكن حلها اذا علم حل خاص: $y_1 = y_1(x)$

عندئذ فان التابع $y = y_1 + \frac{1}{u}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نحول معادلة ريكاتي إلى معادلة خطية لـ z

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

نعوض في المعادلة ⟸

$$-\frac{1}{z^2}(z' - (2Py_1 + Q)z - P) = 0$$

ملاحظة ①: كل معادلة ريكاتي لابد أن يعطى حل خاص لها أو نحل هذا الحل الخاص عندئذ يجب معرفة هذا الحل حتى نعوض بالمعادلة ذات الثوابت ثم نحل المعادلة.

ملاحظة ②: بمعرفة حلين خاصين للمعادلة يكون الحل العام هو

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = c \cdot e^{\int -P(y_1 - y_2)dx}$$

مثال: $2x^2\frac{dy}{dx} = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$

علماً أن لها حل خاص من الشكل $y = ax + b$

$$\frac{dy}{dx} = a$$

نعوض: $2x^2 a = (x-1)((ax+b)^2 - x^2) + 2ax^2 + 2bx$

بالمطابقة بين الأمثال في الطرفين نجد أن:

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad , \quad b = 0$$

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = -x$$

نفرض: $y = x + \frac{1}{z}$ ⟸ $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{z'}{z^2}$

نعوض في المعادلة:

$$= 1 - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{dz}{dx} + z = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} \Longleftarrow$$

$$M = e^x$$

$$z = e^{-x}\left(c + \int e^x\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}\right)dx\right) = ce^{-x} - \frac{1}{2x}$$

$$z = \frac{2cxe^{-x} - 1}{2x} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{2x}{2cxe^{-x} - 1}$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{2x}{2cxe^{-x} - 1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z