كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

4) معادلات تفاضلية التي تتحول إلى تامة: لتكن لدينا

(1) ..... $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

إذا كانت المعادلة (1) غير تامة أي إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

عندئذ نضرب بتابع $\mu(x,y)$ يكيف نحولها إلى تامة

ونسمي التابع $\mu(x,y)$ بتابع التكيف.

$\mu.M\,dx + \mu.N\,dy = 0$ أي نضع المعادلة تامة

أي $\frac{\partial(\mu.M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu.N)}{\partial x}$ وهي معادلة تفاضلية جزئية

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \quad \text{---} (2)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية المجهول فيها هو μ بما

نستطيع إيجاد التابع الذي يجعل المعادلة تامة (فتكون حلها أصعب

من حل المعادلة التفاضلية الأصلية) لذلك سوف نعتبر بعض

الحالات الخاصة لإيجاد عامل التكيف:

(1) عامل التكيف تابع فقط لـ x $\quad \mu = \mu(x)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \Leftarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$$

نعوض في (2)

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$N\cdot\frac{dM}{dx}=M\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{dM}{M}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

شرط لازم وكافي لكي يكون عامل التكامل تابع فقط لـ x هو أن يكون:

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$ تابع فقط لـ x.

$$\frac{dM}{M}=\psi(x).dx \qquad \int\psi(x).dx$$

$$\ln M=\int\psi(x).dx\Rightarrow M=e$$

(2) عامل التكامل تابع فقط لـ y $M=M(y)$

$$\frac{\partial M}{\partial x}=0\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{dM}{dy}$$

حسب (2)

$$-M\cdot\frac{dM}{dy}=M\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{dM}{M}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy$$

شرط لازم وكافي لكي يكون عامل التكامل تابع فقط لـ y هو أن يكون $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y)$ تابع فقط لـ y

$$\frac{dM}{M}=\varphi(y).dy$$

$$\Rightarrow M=e^{\int\varphi(y).dy}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ عامل التكامل تابع لـ W

$$M = M(W_{xy})$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{dM}{dW}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dM}{dW}\cdot\frac{\partial W}{\partial y} \quad \Leftarrow$$

بضرب المعادلة ② بـ M:

$$M\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{dM}{dW}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} - M\cdot\frac{dM}{dW}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{M} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot\frac{\partial W}{\partial x} - M\cdot\frac{\partial W}{\partial y}}\cdot dW$$

حيث الحالات الآتية:

a- $W = x+y \Leftarrow \frac{\partial W}{\partial x} = 1 \; , \; \frac{\partial W}{\partial y} = 1$

لكي يكون عامل التكامل تابع لـ $(x+y)$ يشترط الالتزام بالآتي:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \varphi(x+y)$$ تابع لـ $(x+y)$ أي:

$$\frac{dM}{M} = \varphi(x+y)\cdot d(x+y) \Leftarrow$$

b- $W = x\cdot y \Leftarrow \frac{\partial W}{\partial x} = y \; , \; \frac{\partial W}{\partial y} = x$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \varphi(x\cdot y)$$

c- $W = x^2 + y^2 \Leftarrow \frac{\partial W}{\partial x} = 2x \; , \; \frac{\partial W}{\partial y} = 2y$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN - 2yM} = \varphi(x^2+y^2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4) عامل التكامل لمعادلة متجانسة: $M = \frac{1}{xM + yN}$

5) المعادلة: $yf_1(x,y)dx + xf_2(x,y)dy = 0$ — $M = \frac{1}{xM - yN}$

تمارين:

(1) $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3 dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ ⟵ المعادلة غير تامة

$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3$ ⟵ $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = 2x$

$\Rightarrow M = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

نضرب بعامل التكامل: $(x^3 e^{x^2} + x e^{x^2} y^4)dx + 2e^{x^2} y^3 dy = 0$

$\underbrace{(x^3 e^{x^2})}_{\text{كامل}} dx + \underbrace{(x e^{x^2} y^4 dx + 2e^{x^2} y^3 dy)}_{\text{كامل}} = 0$

$+ \frac{1}{2} e^{x^2} y^4 = c$ ⟵ تكامل الجزء

(2) $(y + xy^2)dx - x dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$

$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2xy$ ⟵ $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2(1+xy)}{-y(1+xy)}$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{2}{y}$ ⟵

$M = e^{-2\ln|y|}$

$\Rightarrow M = e^{\ln \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$

تكامل الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) $(x^2 - y^2 + 2x)dx + (x^2 - y^2 - 2y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2y - 2x = -2(x+y) \quad , \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \frac{-2(x+y)}{-2(x+y)} = 1$

$\mu = e^{\int 1 . d(x+y)} = e^{x+y}$

(5) المعادلات التفاضلية الخطية:

كل معادلة من الشكل: $y' + P(x).y = q(x)$ — (1)

هي معادلة تفاضلية خطية (علاقة خطية بين y و y') ومعادلة من الدرجة الأول بالنسبة لـ (y و y') و(الاقتصر الباء (y, y'))

إذا كان: $q(x) = 0$ في (1) فإن المعادلة تأخذ الشكل

(2) $y' + P(x)y = 0$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة (لأنه الطرف الثاني) حل المعادلة الخطية المتجانسة (2)

نجد إلى منفصلة متغيرات بالنسبة على $y \neq 0$

$\frac{1}{y} dy = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x).dx + \ln c$

$y_h = c\, e^{-\int P(x).dx}$

نظرية: أي حل للمعادلة الخطية (1) يكتب على شكل مجموع حلين:

(1) y_h: حل عام للمعادلة المتجانسة

(2) y_p: حل خاص لغير المتجانسة

الحل العام للمعادلة غير المتجانسة: $y = y_h + y_p$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى:

(أ) طريقة لاغرانج (طريقة تغيير الثابت):

نأخذ المعادلة المتجانسة ونحلها فتكون $y_h = c \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$

نعتبر الثابت تابع لـ x أي $y_p = c(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$ ... (3)

نعوض $c(x)$ بحيث تكون (3) حل للمعادلة (1)

نكون: $y_p' = c'(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} - P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$

نعوض y_p و y_p' في (1)

$$c'(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} - P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} + P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx} = q(x)$$

$$c'(x) = q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}$$

$$c(x) = \int \left(q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

نعوض في (3) $y(x) = y_p + y_h$

إذا لم تنتهي على المعادلة التفاضلية

فنحل بنفس الطريقة لكن: $c(x) = \int \left(q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right) dx + c_1$

نعوض في (3)

$$y(x) = \int \left(q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right) dx \cdot e^{-\int P(x)\,dx} + c_1 \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$

(ب) طريقة عامل التكامل:

$$dy + (P(x) - q(x))\,dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{P(x)}{1} = P(x)$$

$$\Rightarrow M(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{M}\left(\int q(x) \cdot M \cdot dx + c_1\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z