كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1- معادلات تفاضلية ذات معاملات خطية:

$(a_1x+b_1y+c)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

هذا النوع من المعادلات يمكن تحليله إلى معادلتين متجانستين بعد ثم إن منفصلة متغيرات وهنا يجب مراعاة حالتين:

تمثل معادلتين مستقيمين $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ في المستوي XOY

① إذا كان: $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ⟸ المستقيمان متقاطعان

نوجد نقطة التقاطع ولتكن (x_0,y_0)

نسحب المحاور الإحداثية إلى هذه النقطة:

$\begin{cases} x=x_0+X \\ y=y_0+Y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx=dX \\ dy=dY \end{matrix}$

مثال: $y+\frac{x-5y+5}{5x-y+1}=0$

$\Rightarrow (5x-y+1)dy+(x-5y+5)dx=0$

المستقيمان متقاطعان ⟸ $\frac{5}{1}\neq\frac{1}{5}$

$5x-y+1=0$ ⟸ حذف ÷ (-5)

$x-5y+5=0$

$\Rightarrow x_0=0 \Rightarrow y_0=1 \quad (0,1)$

$\begin{cases} x=0+X \\ y=1+Y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx=dX \\ dy=dY \end{matrix}$

نحوصنف في المعادلة: $(5X-Y)dY+(X-5Y)dX=0$

نفرض: $Z=\frac{Y}{X} \Leftarrow Y=ZX$

$dY=X.dZ+Z.dX$

نعوض:

$(5X-XZ)(XdZ+ZdX)+(X-5XZ)dX=0$

$(-XZ^2+X)dX+(5X^2-X^2Z)dZ=0$

$X(1-Z^2)dX+X^2(5-Z)dZ=0$

نقسم على $X^2(1-Z^2)\neq 0 \Leftarrow$

$\frac{1}{X}dX+\frac{5-Z}{1-Z^2}dZ=0$

$\Rightarrow \frac{1}{X}dX+\left(\frac{2}{1-Z}+\frac{3}{1+Z}\right)dZ=0$

$\ln X-2\ln|1-Z|+3\ln|1+Z|=\ln C$

$\ln X+\ln\frac{(1+Z)^3}{(1-Z)^2}=\ln C$

$\ln\frac{X(1+Z)^3}{(1-Z)^2}=\ln C \Rightarrow X(1+Z)^3=C(1-Z)^2$

$\Rightarrow X\left(1+\frac{y-1}{x}\right)^3=C\left(1-\frac{y-1}{x}\right)^2$

$(x+y-1)^3=C(x-y+1)^2$

(2) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \Leftarrow$ معاملات متوازية

في هذه الحالة نضع $Z=a_1x+b_1y$

$dZ=a_1dx+b_1dy$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $(x+2y+3)dx-(3x+6y+7)dy=0$

المستقيمات متوازية $\left(\frac{1}{-3}=\frac{2}{-6}\neq\frac{3}{-7}\right)$

نفرض: $z=x+2y \Rightarrow dz=dx+2dy$

نجعله: $(z+3)dx-(3z+7)\left(\frac{dz-dx}{2}\right)=0$

$\left(z+3+\frac{3}{2}z+\frac{7}{2}\right)dx-\frac{1}{2}(3z+7)dz=0$

$\left(\frac{5}{2}z+\frac{13}{2}\right)dx-\frac{1}{2}(3z+7)dz=0$

$dx-\left(\frac{3z+7}{5z+13}\right)dz=0$

التكامل $\Rightarrow$

$x-\frac{3}{5}z+\frac{4}{25}\ln(5z+13)=c$

ونجعله بـ z.

3) المعادلات التفاضلية التامة:

تعريف: نقول عن معادلة تفاضلية $M_{(x,y)}dx+N_{(x,y)}dy=0$ أنها تامة إذا وفقط إذا كان الطرف الأيسر للمعادلة يمثل تفاضلاً تاماً لتابع $\Phi_{(x,y)}$، أي $d\Phi=Mdx+Ndy$، وحل المعادلة هو $\Phi_{(x,y)}=c$ وهو تكامل عام لمعادلة تفاضلية.

ملاحظة: الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة تامة هو أن يكون $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ البرهان

نوع الشرط:

نفرض المعادلة تامة بالتالي يوجد $\Phi_{(x,y)}$ بحيث:

$$d\Phi_{(x,y)}=M_{(x,y)}dx+N_{(x,y)}dy$$

$$d\Phi_{(x,y)}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial N}{\partial y}dy$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالمعادلة نجد: $N_{(x,y)} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, $M_{(x,y)} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{dx.dy} \quad , \quad \frac{\partial M}{dy} = \frac{\partial^2 \phi}{dy.dx}$$

بما أن $\frac{\partial^2 \phi}{dx.dy} = \frac{\partial^2 \phi}{dy.dx} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

كفاية الشرط: نفرض أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ونثبت أن المعادلة تامة

أي نثبت وجود ϕ:

ψ تابع فقط لـ y $\Leftarrow$ $\psi = N_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}\int M_{(x,y)}\,dx$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M_{(x,y)}\,dx\right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M_{(x,y)}\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$\Leftarrow$ $\psi = \psi_{(y)}$ ونفرض الدالة: $\phi_{(x,y)} = \int M_{(x,y)}\,dx + \int \psi_{(y)}\,dy$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M_{(x,y)} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M_{(x,y)}\,dx + \psi_{(y)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M_{(x,y)}\,dx + N_{(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y}\int M_{(x,y)}\,dx = N_{(x,y)}$$

$$M_{(x,y)}\,dx + N_{(x,y)}\,dy = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = d\phi \Leftarrow$$

المعادلة تامة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال 1: $(4x-3y-y\sin x)dx+(\cos x-3x-\sin y)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-3-\sin x = \frac{\partial N}{\partial x}=-\sin x-3$

المعادلة تامة

$d\phi_{(x,y)}=\frac{\partial \phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}dy=M\,dx+N\,dy$ (1)

$\frac{d\phi}{dx}=4x-3y-y\sin x \rightarrow (1)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y}=\cos x-3x-\sin y \rightarrow (2)$

نكامل من (1) بالنسبة لـ x

$\phi_{(x,y)}=2x^2-3yx+y\cos x+\psi(y)$

نكامل من (2) بالنسبة لـ y

$\phi_{(x,y)}=y\cos x-3xy+\cos y+\psi(x)$

بالتالي التكامل العام:

$\phi_{(x,y)}=2x^2-3yx+y\cos y+\cos y=c$

حل 2: نجزء لزمر: $-3yx$ تفاضل تام

$(4x\,dx)+(-\sin y\,dy)+(-3y\,dx-3x\,dy)$

$+(-y\sin x\,dx+\cos x\,dy)=0$

$y\cos x$ تفاضل تام

نكامل:

$(2x^2)+(\cos y)+(-3yx)+(y\cos x)=c$

مثال 2: لتفرقة:

$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ المعادلة تامة

$\frac{x^2}{y^3}$ تفاضل تام

$\left(\frac{2x}{y^3}dx-\frac{3x^2}{y^4}dy\right)+\left(\frac{1}{y^2}dy\right)=0$ نكامل $\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{y}=c$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة