كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

b) تشكيل معادلات تفاضلية من جمعة العائلات الهندسية والفيزيائية

أمثلة: في الهندسة:

① منحنى معرف بالشرط هيئة أن ميل المماس لها في نقطة ما يساوي ضعف مجموع الإحداثيات، المطلوب: $\frac{dy}{dx} = 2(x+y)$

② منحنى معرف بالشرط هيئة أن مجموع أطوال قطعتي مستقيم المماس المرسوم في النقطة (x,y) مع المحورين الأساسيين تساوي ضعف (2)، المطلوب:

لتكن $M(x,y)$ نقطة كيفية على المنحنى فيكون ميل المماس في هذه النقطة $y' = \frac{dy}{dx}$

معادلة المماس: (X,Y) نقطة كيفية من المماس

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

تقاطع المماس مع $X=0 \Leftarrow Y = y - x\frac{dy}{dx}$

$Y=0 \Leftarrow X = (-y)\frac{dx}{dy} + x$

$X + Y = 2 \Rightarrow$

$$y - x\frac{dy}{dx} - y\frac{dx}{dy} + x = 2 \Rightarrow$$

$$y\frac{dy}{dx} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y + x\frac{dy}{dx} = 2\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y-2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

وهي المعادلة التفاضلية التي تمثل لنا معادلة الحركة المطلوبة في المثال.

لدينا جسم كتلته m يتحرك على محور موجه ox ثبتت عليه قوة تناسب مع (بعده عن المبدأ (x)) وتتجه نحو المبدأ (o) وقوة مقاومة تناسب طرديا مع سرعته. أوجد المعادلة التفاضلية

الحل: القوة الأولى: تناسب $\Rightarrow -k_1 x \Leftarrow$ تتجه نحو المبدأ
مع بعده عن المبدأ

القوة الثانية $\Leftarrow -k_2 \frac{dx}{dt} \Leftarrow$ قوة مقاومة

تناسب مع سرعته $\Rightarrow$ المشتق الثاني الموجب

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x - k_2 \frac{dx}{dt}$$

وهي معادلة تفاضلية بالمتغير t

نحصل على x كتابع لـ t

ملاحظة: في الفيزياء نستخدم قانون نيوتن $F = m.a$ حيث a المشتق الثاني للموضع والمشتق الأول للسرعة.

معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

أي معادلة $\Rightarrow$ تكتب بالشكل

$f(x, y, y') = 0$ شكل ضمني (1)

$y = f(x, y)$ $\Rightarrow$ معاير الحل النظامي (2) محلولة بالنسبة للمشتق y'

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ شكل التفاضلي (3)

نقسم على dx

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

هذه الأشكال الثلاثة متكافئة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $4yy' - 9x^2 + 5x = 0$ ①

$y' = x^2 + 3$ ②

$3x\,dx - xy\,dy = 0$ ③

تنقسم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى إلى

أنواع 1 " " منفصلة المتغيرات.

2 " " التي تتحول إلى منفصلة متغيرات.

3 " " التامة.

4 " " التي تؤدي التامة.

5 " " المتطية.

6 " " التي تتحول إلى متطية.

---

1) معادلات تفاضلية منفصلة المتغيرات: وهي المعادلات التي تكتب بالشكل: $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$

ويتم حلها بإجراء التكامل مباشرة: $\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = c$

2) معادلات تفاضلية تتحول إلى منفصلة متغيرات:

بالشكل: a) معادلات تفاضلية تكتب بالشكل:

$A_1(x).A_2(y)\,dx + B_1(x).B_2(y).dy = 0$

تحل بالقسمة على $B_1(x).A_2(y) \neq 0$ فتتحول إلى منفصلة متغيرات

مثال: $(xy^2 - x)\,dx - (yx^2 - y)\,dy = 0$

$x(y^2-1)\,dx - y(x^2-1)\,dy = 0$

نقسم على $(y^2-1)(x^2-1) \neq 0$ $\dfrac{x}{x^2-1}\,dx - \dfrac{y}{y^2-1}\,dy = 0$

$\int \dfrac{x}{x^2-1}\,dx - \int \dfrac{y}{y^2-1}\,dy = c$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = c$$

$$\ln\left|\frac{x^2-1}{y^2-1}\right| = 2c \Rightarrow \frac{x^2-1}{y^2-1} = \frac{e^{2c}}{c'}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{y^2-1} = c_1$$ حل المعادلة

(b) تتحول إلى معادلة متغيرات جزئية $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$

$$z = ax+by+c$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b}$$

مثال:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+3y+1)^2$$ (1)

نفرض $z = 2x+3y+1$

$$\frac{dz}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - 2}{3}$$ (2)

نعوض (2) في (1)

$$\frac{dz}{dx} - 2 = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} - 2 = 3z^2$$

$$dz - (2+3z^2)\,dx = 0$$

$$\frac{dz}{2+3z^2} - dx = 0$$

$$\int \frac{dz}{2+3z^2} - \int dx = c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}z - x = c$$

وتعوض (z).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

c) $y\,P(x,y)\,dx + x\,Q(x,y)\,dy = 0$

ملاحظة: نفرض $z = x.y$

مثال: $y(1-x.y)\,dx - x(1+x.y)\,dy = 0$

نفرض $z = x.y \Rightarrow y = \frac{z}{x}$

$dy = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}$

نعوض: $\frac{z}{x}(1-z)\,dx - x(1+z)\left(\frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z}{x}dx - \frac{(1+z)}{z}dz = 0$

$\int \frac{z}{x}dx - \int\left(\frac{1+z}{z}\right)dz = c$

$z\ln x - \ln z - z = \ln c$

$\ln\frac{x^z}{z} - z = \ln c \Rightarrow \ln\frac{x^z}{z} - \ln(e^z) = \ln c$

$\ln\frac{x^z}{z.e^z} = \ln x$

$\Rightarrow$

$\frac{x^z}{z.e^z} = c$

d) معادلات متجانسة:

تعريف: نقول عن تابع $f(x,y)$ أنه متجانس من الدرجة n بالنسبة لـ x, y إذا وجد λ بحيث $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ حيث λ أمثاليه و تحقق العلاقة لأجل جميع قيم λ و حيث n درجة تجانس هذا التابع. مثال: $f(x,y) = x^3 + xy^2 \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3(x^3 + xy^2)$

$f(x,y)$ تابع متجانس من الدرجة الثالثة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(x,y) = \frac{x}{y}\sin\frac{x}{y}$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0\left(\frac{x}{y}\sin\frac{x}{y}\right) = \lambda^0 f(x,y)$ تابع متجانس من الدرجة صفر

$f(x,y) = x^2 + xy^2$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^3 x y^2$ تابع غير متجانس

تعريف: نقول عن معادلة تفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ أنها متجانسة كانت كل من M و N توابع متجانسة ومن نفس الدرجة

$y' = f(x,y)$ يجب أن يكون تابع متجانس من الدرجة صفر حتى تكون معادلة تفاضلية متجانسة

لحل معادلة تفاضلية متجانسة نفرض $z = \frac{y}{x}$

مثال: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ ——— (1)

$f(x,y)$ تابع متجانس من الدرجة صفر ⟸ معادلة تفاضلية متجانسة ليلها نفرض $z = \frac{y}{x}$ ⟸ $y = x.z$

$dy = z\,dx + x\,dz$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$ نعوض في (1) $\Rightarrow x\frac{dz}{dx} + z = e^z + z$

$\Rightarrow x\,dz - e^z dx = 0$ نقسم على $xe^z \neq 0$

$\Rightarrow e^{-z}dz - \frac{1}{x}dx = 0$

$\Rightarrow \int e^{-z}dz - \int \frac{1}{x}dx = c \Rightarrow +e^{-z} + \ln x = \ln c$

$\Rightarrow e^{-z} = \ln\left(\frac{c}{x}\right) \Rightarrow -z = \ln\left(\ln\frac{c}{x}\right) \Rightarrow z = -\ln\left(\ln\frac{c}{x}\right)$

نعوض z

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z