كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الحادية عشر/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

السؤال الأول:

أوجد رتبة العناصر $\bar{2}, \bar{3}, \bar{5}$ في الزمرة $(Z_6, \oplus)$

الحل:

$$Z_6 = [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}]$$

حساب $o(\bar{5})$:

إن العنصر الحيادي في Z_6 بالنسبة لـ $\oplus$ هو $\bar{0}$ فيجب تكوين $\bar{5}$ (مضاعفات $\bar{5}$) أي نبحث عن n الذي يحقق:

$$n.\bar{5} = e = \bar{0}$$

$$2.\bar{5} = \bar{5} \oplus \bar{5} = \overline{5+5} = \overline{10} = \bar{4} \neq \bar{0}$$

$$3.\bar{5} = \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} = \overline{15} = \bar{3} \neq \bar{0}$$

$$4.\bar{5} = \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} = \bar{2} \neq \bar{0}$$

$$5.\bar{5} = \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} = \overline{25} = \bar{1} \neq \bar{0}$$

$$6.\bar{5} = \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} \oplus \bar{5} = \overline{30} = \bar{0}$$

$$\Leftarrow \quad o(\bar{5}) = 6$$

وبنفس الطريقة نحسب:

$$o(\bar{3}) = 2$$

$$o(\bar{2}) = 3$$

رتبة الزمرة Z_6 هي:

$$o(Z_6) = |Z_6| = 6$$

السؤال الثاني:

لتكن:

$$G=\left\{ g_e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad g_2=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad g_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad g_4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad g_5=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix},\quad g_6\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} \right.$$

إن (G, X) زمرة والمطلوب:

أوجد رتبة العنصر g_3 ، g_5

الحل: العنصر الحيادي هو g_1

حساب $o(g_3)$ لذلك نحسب قوى العنصر g_3:

$$g_3^1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}\neq e_1=g_1$$

$$g_3^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}\neq g_1$$

$$g_3^3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=e=g_1$$

$$\Leftarrow \boxed{o(g_3)=3}$$

السؤال الثالث:

لتكن $(R,+)$ زمرة

$$F=\{a+b\sqrt{5}\ ;\ a,b\in IR\}$$

المطلوب: أثبت أنّ $(F,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{R},+)$

الحل:

أولاً: نلاحظ من تعريف F أنّ $F \subseteq \mathbb{R}$ كذلك نلاحظ أنّ $F \neq \phi$

لأنّ:

$0 = 0 + 0\sqrt{5}$, $a = 0 \in \mathbb{R}$, $b = 0 \in \mathbb{R}$

وبالتالي: $0 + 0\sqrt{5} \in F$

ثانياً: لنفرض أنّ F يحقق شرط الزمرة الجزئية وهو

$\forall x, y \in F \Rightarrow x * y^{-1} \in F$

ليكن $x = a + b\sqrt{5}$

و $b = a' + b'\sqrt{5}$

$a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

لدينا:

$$x + (-y) = (a + b\sqrt{5}) + (-(a' + b'\sqrt{5})) =$$
$$(a + b\sqrt{5}) + (-a' - b'\sqrt{5}) =$$
$$(a + (-a')) + b\sqrt{5} + (-b')\sqrt{5} =$$
$$\underbrace{a + (-a')}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(b + (-b'))}_{\in \mathbb{R}}\sqrt{5} \in F$$

وبالتالي $x + (-y) \in F$

$\Leftarrow$ من أولاً و ثانياً $(F,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{R},+)$

السؤال الرابع:

لتكن $(G,\star)$ زمرة تبديلية ولنعرف المجموعة:

$$H=\{x : x\in \mathbb{R} \;\&\; x^2=e\}$$

المطلوب: برهن أنَّ $(H,\star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,\star)$

الحل:

أولاً: من تعريف H نلاحظ أنَّ H مجموعة جزئية من G أي أن $H\subseteq G$ كذلك فإنَّه نعرف e العنصر الحيادي في الزمرة G فإنَّ:

$$e^2=e\cdot e=e \Rightarrow e\in H \Rightarrow H\neq\phi$$

إذاً $H\subseteq G$ ، $H\neq\phi$

ثانياً: لنبرهن شرط الزمرة الجزئية:

$$\forall x,y\in H \Rightarrow x\star y^{-1}\in H$$

حتى نبرهن أنَّ $x\star y^{-1}\in H$ يجب أن نبرهن أنَّ:

$$(x\star y^{-1})^2=e$$

ولدينا:

$$(x\star y^{-1})^2=(x\star y^{-1})(x\star y^{-1})$$
$$=x\star(y^{-1}\star x)\star y^{-1}=x\star(x\star (x\star y^{-1})\star y^{-1}$$
$$=x\star x\star y^{-1}\star y^{-1}$$
$$=x^2\star y^{-1}\star y^{-1}=y^{-1}\star y^{-1}$$
$$=(y\star y)^{-1}=(y^2)^{-1}=e^{-1}=e$$

وبالتالي: $x\star y^{-1}\in H$ من أولاً وثانياً نجد أن $(H,\star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,\star)$

انتهت المحاضرة

مكتبة
A to Z
مكتبة
A to Z
فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN
طباعة محاضرات - قرطاسية
Mob:0931 497 960