كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : العاشرة/نظري/

رتبة زمرة ما:

تكون الزمرة G منتهية إذا كانت تحوي عدداً منتهياً من العناصر المختلفة بعضها عن بعض وندعو عدد هذه العناصر المختلفة بعضها عن بعض برتبة الزمرة G ونكتب إذا كان n عدد عناصر الزمرة G فإنّ رتبة الزمرة المنتهية $O(G)$ ونكتب $O(G)=n$

وإذا كانت الزمرة G غير منتهية أي تحوي عدد من العناصر المختلفة بعضها عن بعض والذي يكون غير منتهي وفي هذه الحالة نقول أن رتبة الزمرة G غير منتهية ونكتب $O(G)=\infty$

مثال:

الزمرة $(\mathbb{R},+)$ غير منتهية لأنّ عدد عناصرها هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير منتهي لذلك $O(\mathbb{R})=\infty$

بينما الزمرة (S_3,o) زمرة التباديل هي زمرة منتهية لأن عدد عناصر S_3 عدد محدد من العناصر وهو 6 بالتالي $O(S_3)=6$

رتبة عنصر ما في زمرة ما:

لتكن G زمرة ما و a عنصراً من G وإذا كان $*$ قانون الضرب المعرف على G عندئذٍ نعرف رتبة العنصر $a\in G$ بأنها أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة: $a^n=e$ أي n يكون هو رتبة العنصر a ونرمز لرتبة العنصر a بالرمز $O(a)$ ونكتب في هذه الحالة $O(a)=n$ بفرض e العنصر الحيادي في الزمرة G وإذا

لم يوجد العدد الطبيعي n الذي تحقق من أجله العلاقة السابقة عندئذٍ نقول أن رتبة العنصر a غير منتهية ونكتب $o(a)=\infty$

بعض الملاحظات

$\boxed{1}$ في حالة كانت $*$ هو قانون الجمع هو المعرف على الزمرة G عندئذٍ يصبح التعريف السابق لرتبة العنصر a بالشكل:
ندعو أصغر عدد صحيح موجب (عدد طبيعي n) يحقق العلاقة: $n.a=e$ برتبة العنصر a والتي نرمز لها بالرمز $o(a)$ ونكتب $o(a)=n$ يعرف e العنصر الحيادي لزمرة G.

$\boxed{2}$ لإيجاد رتبة العنصر a حيث a من G و G زمرة يكفي حساب متتالية العناصر $a^1, a^2, a^3, \dots$ حتى نصل إلى العنصر الحيادي لزمرة G لأول مرة وفي هذه الحالة الأس يساوي رتبة العنصر a وإذا لم نحصل على العنصر الحيادي عندئذٍ نقول إن العنصر a له رتبة غير منتهية.

مثال

في الزمرة $(G=\{-1,1,-i,i\}, \times)$ فيها العنصر الحيادي هو $e=1$
لنحسب رتبة كل العناصر ما عدا الواحد (العنصر الحيادي)
$a=-1\in G$ نشكل متتالية العناصر $a^1, a^2, a^3, \dots$

$a^1=(-1)^1=-1 \neq e=1$

$a^2=(-1)^2=1=e$

ومنه $n=2 \Leftarrow o(-1)=2$

لنحسب رتبة العنصر $a=i\in G$:

$a^1=(i)^1=i \neq e=1$

$a^2 = (i)^2 = -1 \neq e = 1$

$a^3 = (i)^3 = i \times i \times i = -i \neq e = 1$

$a^4 = (i)^4 = i \times i \times i \times i = 1 = e$

ومنه $n = 4 \Leftarrow o(i) = 4$

لمرتبة العنصر $a = -i \in G$؛

$a^1 = (-i)^1 = -i \neq e = 1$

$a^2 = (-i)^2 = -i \times -i = -1 \neq e = 1$

$a^3 = (-i)^3 = -i \times -i \times -i = i \neq e = 1$

$a^4 = (-i)^4 = -i \times -i \times -i \times -i = 1 = e$

ومنه $n = 4 \Leftarrow o(-i) = 4$

مع العلم أنّ G زمرة منتهية و عدد عناصرها $|G| = 4$

ومنه فإنّ $O(G) = 4$ بينما إذا أخذنا في الزمرة $(\mathbb{R}, +)$

فإنّ رتبة أي عنصر $a \neq 0$ حيث a من $\mathbb{R}$ هي غير منتهية a

أي $o(a) = \infty$ لأنّه على سبيل المثال $a = 2$ عندئذٍ

لا يمكن إيجاد عدد صحيح موجب n تحقق من أجله العلاقة

$n(2) = 0$ حيث 0 هو العنصر الحيادي في الزمرة $(\mathbb{R}, +)$

ملاحظة: دوماً لدينا في أي زمرة $a^0 = e$ حيث e العنصر الحيادي

في هذه الزمرة و لذلك لا نعتبر الصفر رتبة للعنصر a حيث a من G.

كذلك عندما $0 \cdot a = e$ هي علاقة محققة دوماً في أي زمرة G

مانوناها هي و e عنصرها الحيادي و a عنصر منها لا نعتبر 0

رتبة للعنصر a.

مثال: أوجد رتبة العنصر $\bar{1}$ و $\bar{1}^{-1}$ في الزمرة $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$ حيث العنصر الحيادي هو $e=\bar{0}$

أولاً حساب $o(\bar{1})$ ~~$o(\bar{1})$~~

$o(\bar{1})$: $1.\bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0}$

$2.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}$

$3.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{3}$

$\Leftarrow \quad o(\bar{1}) = 3$

$o(\bar{1}^{-1}) = o(\bar{2})$: $1.\bar{2} = \bar{2} \neq \bar{0}$

$2.\bar{2} = \bar{2} \oplus \bar{2} = \bar{4} = \bar{1} \neq \bar{0}$

$3.\bar{2} = \bar{2} \oplus \bar{2} \oplus \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$

$\Leftarrow \quad o(\bar{1}^{-1}) = o(\bar{2}) = 3$

نظرية (دون برهان):

إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما وكان a عنصراً رتبته n فيها أي $o(a)=n$ عندئذٍ فإنّ العناصر التالية: $a^0=e, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$ مختلفة في G.

نتيجة: إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و e عنصرها الحيادي و $a \in G$ و $o(a) = \infty$ عندئذٍ فإنّ العناصر: $a^0=e, a^{\mp 1}, a^{\mp 2}, a^{\mp 3}, \dots$ مختلفة في G.

نظرية:

إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما عنصرها الحيادي e وإذا كان a عنصراً من G رتبته n فيها وإذا كانت k عدد صحيح تحقق من أجله العلاقة $a^k=e$ عندئذٍ فإنّ k يقبل القسمة على n.

مولدات الزمرة، الزمر الدورية:

تعريف: إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و M مجموعة جزئية غير خالية من G أي $M \neq \phi$ و $M \subseteq G$ إنَّ تقاطع جميع الزمر الجزئية من الزمرة $(G,*)$ والتي تحوي كلاً منها المجموعة M هو زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ تحوي M أيضاً وندعوها الزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة M واختصاراً M ونرمز لمجموعة عناصرها بـ (M) وهي أصغر زمرة جزئية من الزمرة G تحوي M وندعو عناصر المجموعة M مولدات الزمرة M.

عندما $M=\{a\}$ و G حيث a عنصر ما من G عندئذٍ ندعو الزمرة الجزئية المولدة بـ M زمرة جزئية دورية مولدة بالعنصر a ونرمز لها بالرمز (a) ومولدها هو العنصر a من G

ملاحظة: $(M)=(\{a\})=(a)$ للاختصار والسهولة.

نظرية: مولدات الزمرة:

لتكن $(G,*)$ زمرة ما ولتكن M مجموعة جزئية غير خالية من G إذا كانت H هي المجموعة:

$$H=\{x\in G ; x=a_1^{n_1}*a_2^{n_2}*a_3^{n_3}*\dots*a_k^{n_k} \text{ و } a_1,a_2,\dots,a_k\in M \ \wedge\ n_1,n_2,\dots,n_k\in \mathbb{Z} , k\in \mathbb{Z}^+\}$$

فإنَّ $(H,*)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وهي أصغر زمرة جزئية في G تحوي المجموعة M.

البرهان:

أولاً: سنبرهن أنَّ $(H,*)$ زمرة جزئية من G

ثانياً: $M \subseteq H$

ثالثاً: H أصغر مجموعة جزئية من G تحوي M

برهان أولاً:

لنبرهن أنّ $\phi \neq H \subseteq G$ حسب تعريف H فإنّ H مجموعة جزئية من G أي H محتواة في $G \Leftarrow H \subseteq G$ وكذلك نفرض e العنصر الحيادي في الزمرة G فإنّه بما أنّ $M \neq \phi$ وبالتالي إذا كانت $a \in M \subseteq G \Leftarrow$ لأنّ $a^0 = e \subseteq H$

$o \in Z \;\wedge\; a \in M \Leftarrow H \neq \phi$ إذاً $\phi \neq H \subseteq G$

لنبرهن الشرط التالي:

$$\forall x, y \in H \Rightarrow x \star y^{-1} \in H$$

$$x \in H \Rightarrow x = a_1^{n_1} \star a_2^{n_2} \star \ldots \star a_k^{n_k}$$

$$y \in H \Rightarrow y = b_1^{m_1} \star \ldots \star b_r^{m_r}$$

حيث:

$$a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r \in M \wedge n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_r \in Z \wedge$$
$$k, r \in Z^+$$

لدينا:

$$x \star y^{-1} = (a_1^{n_1} \star \ldots \star a_k^{n_k}) \star (b_1^{m_1} \star \ldots \star b_r^{m_r})^{-1}$$

$$x \star y^{-1} = a_1^{n_1} \star \ldots \star a_k^{n_k} \star b_r^{-m_r} \star \ldots \star b_1^{-m_1} \in H$$

$\Leftarrow$ H زمرة جزئية من الزمرة G لأنّ: ~~$a_1, \ldots, a_k \in M$~~

$$a_1, \ldots, a_k \in M \wedge b_1, \ldots, b_r \in M \wedge n_1, \ldots, n_k, -m_1, \ldots, -m_r \in Z$$

لأنّ $(Z, +)$ زمرة و $\wedge\; m_1, \ldots, m_r \in Z \;\wedge\; r, k \in Z^+$

إذاً $(H, \star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, \star)$

برهان ثانياً: $M \subseteq H$

$\forall a = a^{1} \in M \Rightarrow a = a^{1};\ 1 \in Z \ \& \ a \in M$

$\Rightarrow a \in H$ حسب تعريف H

$\Rightarrow M \subseteq H$

برهان ثالثاً:

لنبرهن أن H أصغر زمرة جزئية تحوي M من أجل ذلك

لنفرض أن $(F, \star)$ زمرة جزئية من الزمرة G بحيث أن الزمرة F

تحوي المجموعة M أي $M \subseteq F$ ولنبرهن أن $H \subseteq F$

$\forall x \in H \Rightarrow x = a_1^{n_1} \star \dots \star a_k^{n_k};\ a_1, \dots, a_n \in M,\ \wedge$

$n_1, \dots, n_k \in Z \wedge k \in Z^{+}$

علماً أن: $M \subseteq F \wedge a_1, a_2, \dots, a_k \in M$

و F زمرة جزئية من G وبالتالي فهي زمرة، إذاً:

$$x = \underset{\substack{\Uparrow \\ F}}{a_1^{n_1}} \star \dots \star \underset{\substack{\Uparrow \\ F}}{a_k^{n_k}} \in F$$

$\Rightarrow x \in F \Rightarrow H \subseteq F$

و H تحوي M من ثانياً إذاً H أصغر زمرة جزئية

تحوي المجموعة M.