كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

القسم: رياضيات

السنة: الثانية

المادة: بنى جبرية — المحاضرة: 9 نظري

الزمر الجزئية:

تعريف: لتكن $(G,*)$ زمرة و H مجموعة غير خالية منها أي $\emptyset \neq H \subseteq G$ نقول عن $(H,*)$ إنها زمرة جزئية من G إذا كانت $(H,*)$ و اعتماداً H تحقق جميع شروط الزمرة أي إنها زمرة.

1) نتج من التعريف مباشرة أنّه يوجد دوماً في أي زمرة G زمرتان جزئيتان منها هما: $(G,*)$, $(\{e\},*)$ يعرف أن e العنصر الحيادي في الزمرة G.

2) إن العنصر الحيادي في الزمرة الجزئية $(G,*)$ هو نفسه العنصر الحيادي في أي زمرة جزئية H من G، لأنه:

يعرف أن H زمرة جزئية من الزمرة G ويعرف e العنصر الحيادي في الزمرة G و e' العنصر الحيادي في الزمرة الجزئية H عندئذٍ:

يعرف e العنصر الحيادي في G: $e * e' = e' \quad \cdots (1)$

ولكن $e' \in H \subseteq G$

يعرف e' العنصر الحيادي في H: $e' * e' = e' \quad \cdots (2)$

من (1) و (2) نجد أن $e * e' = e' * e'$

وبتطبيق الاختزال على G فإنّ $e = e'$ والعنصر الحيادي في الزمرة G هو نفسه في أي زمرة جزئية منها

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إنّ نظير أي عنصر x من الزمرة الجزئية $(H,*)$ من G هو نفسه نظير العنصر x في الزمرة $(G,*)$، ذلك لأنّه:

بفرض x' نظير (مقلوب) x في الزمرة الجزئية H فإنّ:

① $x*x' = x'*x = e \quad ; \quad \forall x \in H \subset G$

بفرض e العنصر الحيادي في الزمرة G

وبفرض "x نظير x في الزمرة G فإنّ:

② $x*x'' = x''*x = e$

من ① و ② نجد أنّ $x*x' = x*x''$

بالاختزال نجد أنّ: $x' = x''$ ونظير $x \in H$ هو نفسه في الزمرة الجزئية H والزمرة G

مثال: $(\mathbb{R},+)$ زمرة، $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية منها لأنها $\phi \neq \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ تحقق شروط الزمرة ولا ننسى أن

من النظريات الأساسية التي تعطي تعابير أخرى لزمر جزئية:

نظرية ①: لتكن $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G أي $\phi \neq H \subset G$ إنّ الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة G هو أن يتحقق الشرطان:

① $\forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$

② $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وجود هو $e \in H$ يحقق الشرط:

$$\forall x \in H \Rightarrow x * e = e * x = x$$

- وجود المقابل النظير: هـ ب الشرط ② مباشرة:

$$\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H ; \; a * a^{-1} = e \;\&\; a^{-1} * a = e$$

بما سبق نجد أن $(H, *)$ زمرة وبما أن $H \subset G$ هي زمرة جزئية من الزمرة G.

نظرية ②: ليكن $(G, *)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية منها إن الشرط اللازم والكافي حتى يكون $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة G هو أن يحقق الشرط:

$$\forall a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$$

البرهان:

لزوم الشرط: المعطى: G زمرة، $\phi \neq H \subset G$ و H زمرة جزئية من G.

المطلب: تحقق الشرط.

بما أن H زمرة جزئية من G وبالتالي هي زمرة إذاً:

$$\forall a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$$

لأن $*$ مغلقة على عناصر H والشرط تحقق.

لكفاية الشرط: المعطى: G زمرة والشرط تحقق.

المطلب: H زمرة جزئية من G.

نبرهن شروط الزمرة بالاعتماد على الشرط السابق:

$$\forall a \in H \Rightarrow a, \bar{a} \in H \Rightarrow a * a^{-1} = e \in H$$

المعطى e العنصر الحيادي في G إذاً:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان:

لزوم الشرط: الفرض: G زمرة و H زمرة جزئية منها.

المطلوب: يتحقق الشرطان ① و ②

بما أن H زمرة جزئية من الزمرة G وبالتالي فهي زمرة وبالتالي $*$ مغلقة على عناصر H ولكل عضو من H نظير بالنسبة لـ $*$ أي الشرطان التاليان يتحققان:

① $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$

② $\forall a\in H \Rightarrow a^{-1}\in H$

كفاية الشرط: الفرض: G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G والشرطان ① و ② يتحققان

المطلوب: $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة G.

لنثبت أن $(H,*)$ زمرة جزئية من G تتحقق أنها زمرة، أي تحقق شروط الزمرة:

من التعريف نجد أن $H\neq\phi$ ومن الشرط الأول:

$*$ مغلقة على عناصر $H \Rightarrow \forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$

بما أن $*$ تجميعية على جميع عناصر G لأن G زمرة فإن $*$ تجميعية على عناصر H لأن $H\subseteq G$

بما أن $H\neq\phi$ من الفرض وبالتالي يوجد فيها عضو واحد على الأقل وليكن a أي $a\in H$ ومن الشرط ② $a^{-1}\in H$

إذاً $\forall a\in H, a^{-1}\in H \Rightarrow a*a^{-1}\in H$ وذلك حسب الشرط الأول

$\Rightarrow e=a*a^{-1}\in H\subseteq G$

يمثل e العنصر الحيادي في G إذاً العنصر الحيادي في H

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$e, a \in H \subset G \Rightarrow a^{-1} = e * a \in H$

حسب الشرط وبالتالي الشرط التالي محقق:

$\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ ... ①

يبقى علينا أن نبرهن الشرط:

$\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$ ... ②

$\forall a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \Rightarrow a * (b^{-1})^{-1} \in H$

(حسب الشرط المطبق بالأعلى) (حسب الشرط ①)

$\Rightarrow \forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$

وبما أن الشرطان ① و ② تحققان ← حسب النظرية ① فإن H زمرة جزئية من G وهو المطلوب.

النظرية ②: لتكن $(G, *)$ زمرة ولتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G أي $\phi \neq H \subset G$ ومنتهية في G عندئذٍ إن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من الزمرة G هو أن يتحقق الشرط

$\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$

ملاحظة: تطبق النظريتان ① و ② تعاريف مكافئة للزمر الجزئية ويمكن تلخيصها بالشكل:

$\phi \neq H \subset G$ و G زمرة و H زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كانت الشروط التالية محققة

① $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

② $\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي أنه يكون الشرط التالي محقق :

$$\forall a,b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$$

* أيضاً النظرية (3) تعطي تعريف آخر للزمر الجزئية ولكن لا يمكن تطبيقها من أجل جميع الزمر الجزئية فقط في حالة كانت H منتهية.

G زمرة و $H \subset G$ و $\phi \neq H$ منتهية من G فإنّ H زمرة جزئية من الزمرة G إذا و فقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall a,b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$$

مثال :

لتكن G زمرة ما و لنعرف المجموعة

$$Z(G) = \{a ; a \in G , ax = xa , \forall x \in G\}$$

و المطلوب أثبت أن $(H,*)$ أي H زمرة جزئية من الزمرة G.

البرهان :

طريقة (1) : قبل إثبات أن H زمرة جزئية من الزمرة G يجب إثبات أنّ $\phi \neq H \subset G$ أي أنّ H مجموعة جزئية غير خالية من G

لا يمكن هذا الشرط في جميع التمارين التي يطلب منا فيها إثبات أن H زمرة جزئية من زمرة ما G.

نلاحظ من تعريف $H = Z(G)$ أن H مجموعة جزئية من G أي أن $H \subset G$ وكذلك فإنّ $e \in H$ يفرض e العنصر الحيادي في G لأنّه :

$$e \in G , e * x = x * e = x ; \forall x \in G$$

$$\Rightarrow e \in H \Rightarrow \phi \neq H \subset G$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نطبق إما الشرط الموجودة في النظرية ① أو الشرط الموجودة في النظرية ② أما الشرط الموجود في النظرية ③ فلا يمكن تطبيقه لأنه لا نعلم إذا كانت H منتهية أو لا.

نبرهن شروط النظرية ① وهي:

① $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} G H$

② $\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$

بالنسبة لـ ①:

$\forall a \in H \Rightarrow a \in G \;\&\; ax = xa \;;\; \forall x \in G$

ولنبرهن أن a^{-1} تنتمي إلى H: حتى نبرهن ذلك يجب أن نبرهن أنّ:

$a^{-1}x = x a^{-1} \;;\; \forall x \in G$

$x a^{-1} = e(x a^{-1}) = a^{-1}(ax)a^{-1} = a^{-1}x(aa^{-1})$

$= a^{-1} x e = a^{-1} x$ ✱

$\Rightarrow x a^{-1} = a^{-1} x \Rightarrow a^{-1} \in H$

بالنسبة لـ ②:

$\forall a, b \in H \Rightarrow ax = xa \;\&\; bx = xb \;;\; x \in G$

حتى نبرهن أن $a * b = H$ يجب أن نبرهن أن:

$abx = xab \;;\; \forall x \in G$

$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b$

$= xab \Rightarrow ab \in H$

على سبيل المثال $H = Z(G)$ زمرة جزئية في G.

طريقة ثانية: نبرهن باستخدام شرط النظرية ②

$\forall a, b \in Z(G) \Rightarrow a * b^{-1} \in Z(G)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall a,b \in H \Rightarrow ax = xa \ \& \ bx = xb \ ; \ \forall x \in G$

حتى يتحقق أن $ab^{-1} \in H$ يجب أن يتحقق أن

$ab^{-1}x = xab^{-1} \quad \forall x \in G$

لدينا:

$(ab^{-1})x = ab^{-1}xe = ab^{-1}(xb)b^{-1} = a(b^{-1}b)xb^{-1}$

$= aexb^{-1} = (ax)b^{-1}$

$ab^{-1}x = xab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in H$

مما سبق نجد أن $H = Z(G)$ زمرة جزئية من G تدعى مركز الزمرة.

تعريف: تقاطع أسرة من الزمر الجزئية من زمرة هو زمرة جزئية أي إذا كانت $(G, *)$ زمرة و $\{(A_i, *)\}_{i \in I}$ أسرة من الزمر الجزئية من G فإن:

$(\bigcap_{i \in I} A_i, *)$ زمرة جزئية من G.

البرهان:

① نبرهن أن $\phi \neq \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq G$ فإنّ:

$\forall i \in I \ ; \ A_i \in G$ وبناءً على تعريف التقاطع فإنّ:

$\bigcap_{i \in I} A_i \subset G$ وكذلك فإنّ $\forall i \in I$; $(A_i, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $G \Leftarrow$

$e \in A_i \ ; \forall i \in I \Rightarrow e \in \bigcap_{i \in I} A_i$

بفرض e العنصر الحيادي في $G \Leftarrow \phi \neq \bigcap_{i \in I} A_i$

$\Leftarrow \phi \neq \bigcap_{i \in I} A_i \subset G$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لنبرهن شرط الزمرة الجزئية:

$\forall a,b \in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow a*b^{-1} \in \bigcap_{i\in I} A_i$

$\forall a,b \in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow a,b \in A_i \; ; \forall i \in I$

$\Rightarrow a*b^{-1} \in A_i \; ; \forall i \in I$

لكن $(A_i,*)_{\forall i\in I}$ زمرة جزئية من الزمرة G وذلك:

$\Rightarrow a*b^{-1} \in \bigcap_{i\in I} A_i$

$\Leftarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ زمرة جزئية من الزمرة G أي أن التقاطع لأسرة من الزمر الجزئية هو من زمرة ما هو زمرة جزئية منها

ملاحظة هامة:

وجدنا أن تقاطع أسرة جزئية من زمر جزئية من زمرة ما هو زمرة جزئية من هذه الزمرة ولكن ما يصح لتقاطع ~~الزمر الجزئية~~ يصح بالنسبة للاجتماع أي أن اجتماع زمرتين جزئيتين من زمرة ما ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية من هذه الزمرة في الحالة العامة.

مثال: إن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة وكذلك فإن $(6\mathbb{Z},+)$ و $(5\mathbb{Z},+)$ زمرتان جزئيتان من $(\mathbb{Z},+)$ ~~يبرهن على ذلك~~:

لدينا ★

$6\mathbb{Z} = \{\ldots,-12,-6,0,6,12,\ldots\}$

$6\mathbb{Z} = \{0, \mp 6, \mp 12, \ldots\}$

$5\mathbb{Z} = \{0, \mp 5, \mp 10, \mp 15 \ldots\}$

ولكن:

$6\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z} = \{0, \mp 5, \mp 6, \mp 10, \mp 12, \mp 15, \ldots\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ليست أمرة جزئية بالنسبة لـ + في الزمرة $\mathbb{Z}$ لأنه إذا أخذنا:

$a=5, b=6 \in 6\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$

$a+b=11 \notin 6\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$

وبذلك $6\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ ليست أمرة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}$

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z