كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

زمرة التباديل أو الزمرة التناظرية S_n:

تعريف: لتكن A مجموعة ما غير خالية أي $A \neq \emptyset$ ندعو التطبيق $f: A \to A$ تبديلة (تبديل للمجموعة A) إذا كان هذا التطبيق تقابلاً أي غامر ومتباين ونرمز لمجموعة جميع تباديل المجموعة A بالرمز S_n

- إن التطبيق الطابق I المعرف بالشكل: $I: A \to A$

$$I(a) = a \quad ; \quad \forall a \in A$$

هو تطبيق تقابلي أي غامر ومتباين ولذلك هو تبديل للمجموعة A

أي أن $I \in S_A$

الآن نفرض أنّ A مجموعة منتهية ونفرض أنّ:

$|A| = x < \infty$ أي: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

عندئذٍ ومن أجل السهولة لنكتب عناصر A بالشكل التالي:

$$A = \{1, 2, \dots, n\}$$

عندئذٍ وفي هذه الحالة نرمز للمجموعة S_A (مجموعة تباديل المجموعة A) بالرمز S_n. ويعبر عن كل عنصر من هذه المجموعة S_n عادة بكتابة مرتبة لكل عناصر الانطلاق وتتم تابعة المقابلة فإذا كان α تبديلاً كيفياً من S_n عندئذٍ فإنّه يكتب بالشكل:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

سيحتوي السطر الأول على عناصر المجموعة A بالترتيب أي مرتبة تصاعدياً من اليمين إلى اليسار، والسطر الثاني يحوي الصور المباشرة لعناصر السطر الأول وفق التبديل (التطبيق) α

يدعى الشكل (*) الصورة القياسية للتبديل α

وندعو n درجة التبديل α وهي درجة أعلى تبديل من المجموعة S_n

أما عدد عناصر هذه المجموعة S_n فيتعين كما يلي:

فإذا كانت: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$ تبديلاً للمجموعة A أي α من المجموعة S_n

عندئذٍ يوجد n إمكانية ليتعين $\alpha(1)$ وعندما يتعين $\alpha(1)$ يبقى لدينا $(n-1)$ إمكانية ليتعين $\alpha(2)$ وبعرفة $\alpha(2)$ يبقى لدينا $(n-2)$ إمكانية ليتعين $\alpha(3)$ وهكذا، وبالمتابعة على نفس المنوال نجد أنّ S_n تحوي:

عنصراً $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

أي أنّ: $|S_n| = n!$

أي S_n مجموعة منتهية أيضاً.

مثال: ليكن α تبديلاً للمجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ من S_5 بالشكل:

$\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 2, \alpha(5) = 5$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

بما أنّ α تبديل وبالتالي فهو تقابل وبالتالي لكل عنصر من A المكتوب في السطر الأول يقابله عنصر واحد فقط من A المكتوب في السطر الثاني وفق α ودرجة هذا التبديل α هي 5، $|S_5| = 5!$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال ٣: إذا كانت α تبديلة للمجموعة A:

نعرف بالشكل: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&4&6&1&7&5&8&3\end{pmatrix}$$

$\alpha(1)=2$ ، $\alpha(2)=4$ ، $\alpha(3)=6$ ، $\alpha(4)=1$

$\alpha(5)=7$ ، $\alpha(6)=5$ ، $\alpha(7)=8$ ، $\alpha(8)=3$

رتبة التبديل α هي 8

ملاحظة: نلاحظ أنّ أي تبديل α للمجموعة $A=\{1,2,\dots,n\}$ عندئذٍ فإنّ α عنصر المجموعة يحوي في السطر الأول عناصر المجموعة A كما هي مرتبة

1 2 3 ... n

دون وضع فواصل فيما بينها وبدون تكرار وبما أنّ α تبديل أي عنصر وقبابين ولذلك فإنّ عناصر السطر الثاني ما هي إلّا عناصر المجموعة A بدون تكرار لأي عنصر من عناصرها أي يمكن اعتبار السطر الثاني ما هو إلا إعادة ترتيب لعناصر السطر الأول.

ملاحظة: أي تبديل α من S_n يكتب بالشكل:

$$\alpha=\begin{pmatrix}\text{السطر الأول}\\\text{السطر الثاني}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{عناصر المجموعة A كما هي مرتبة}\\\text{صور عناصر السطر الأول وفق } \alpha\end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عملية تركيب التباديل أو التطبيقات:

عملية تركيب التباديل لتبديلين وفرضنا يتم من اليمين إلى اليسار بأن نبدأ من الأعلى إلى الأسفل ثم من جديد من أعلى إلى أسفل وهكذا، ويرمز لها بالرمز $\circ$ وفي بعض الأحيان إذا لم يوجد أي التباس فرمز لها بـ . ويمكن أن نستغني عن النقطة بفراغ.

مثال: ليكن التبديلان:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

والمطلوب: أوجد $\alpha \circ \beta$ ، $\beta \circ \alpha$ ، ماذا تستنتج؟

الحل:

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

نستنتج أن $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$ أي أن تركيب التباديل ليس عملية تبديلية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية: لتكن $A=(1,2,\dots,n)$ عندئذٍ فإنَّ $(S_n,\circ)$ زمرة.

البرهان:

أ: العملية $\circ$ مغلقة على عناصر S_n لأنَّ:

$\forall \alpha : \alpha$ تبديل هو تقابل $\Leftrightarrow$ تبديلين تركيب تبديلين (يشكلان تطبيقين تقابلين) هو تبديل (تطبيق تقابل) هو تقابل

$\alpha\circ\beta \in S_n$ وبالتالي

$\forall \alpha,\beta \in S_n$ ذلك

إذا الشرط التالي محقق:

$\forall \alpha,\beta \in S_n \Rightarrow \alpha\circ\beta \in S_n$

- كذلك فإنَّ $S_n \neq \emptyset$ حسب تعريفها.

2: العملية $\circ$ تجميعية على عناصر S_n لأنَّ أي تبديل هو تطبيق تقابل وبما أنَّ عملية تركيب التباديل (التطبيقات) كما نعلم هي عملية تجميعية إذا $\circ$ عملية تجميعية.

3: وجود العنصر الحيادي في S_n بالنسبة لـ $\circ$:

إنَّ التبديل الذي يشكل العنصر الحيادي في S_n بالنسبة للعملية $\circ$ هو التبديلة الطابقة والذي ينقل كل عنصر من A إلى نفسه

أي أنَّ:

$$I=e=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\1&2&3&\dots&n\end{pmatrix};\ \forall i\in A: I(i)=e(i)=i$$

4: لكل تبديل α من S_n نظير (معكوس) هو α^{-1} تطبيقه العكسي، وهو أيضاً تبديل أي $\alpha^{-1}\in S_n$ وتحقق:

$$\alpha\circ\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\circ\alpha=I=e$$

مما سبق نجد أن $(S_n,\circ)$ زمرة ولكنها ليست تبديلية بشكل عام.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: إذا كان $\alpha \in S_5$ والمطلوب أوجد α^{-1} حيث:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

أولاً:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ولترتيبها بالشكل القياسي نكتب العناصر بالأول تصاعدياً مع الاحتفاظ بصورة كل عنصر وفق α^{-1}

$$\Rightarrow \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$

تمرين: شكل جدول كايلي لزمرة التبديل S_1, S_2

S_1: زمرة التبديل للمجموعة $A = \{1\}$ فيها تبديل واحد وهو $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

و $(S_1, \circ)$ زمرة $\Leftarrow$

$S_1 = \{\alpha\}$

$\circ$	α
α	α

S_2: زمرة التبديل للمجموعة $A = \{1,2\}$ وهي ذوي تبديلات عددها:

$$|S_2| = 2! = 2 \times 1 = 2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي:

$$S_2 = \{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \}$$

وجدول كايلي للزمرة:

	$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$x_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	x_1	x_2
$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	x_2	x_1

$e = x_1$ لاحظ أنّ:

العنصر	x_1	x_2
معكوسه	x_1	x_2

تمرين: أوجد جدول كايلي للزمرة S_3

S_3: زمرة التباديل للمجموعة $A = \{1, 2, 3\}$

وفيها 3! عنصراً أي 6 عناصر

تعريف الدور:

نقول عن تبديل ما أنّه تبديل دور أو دور من الطول: $a_1, a_2, \dots, a_m$ طوله m وهو عدد العناصر التي يحويها إذا نفذ هذا التبديل أي عناصر من العناصر التي يشملها التغيير وهي $a_1, a_2, \dots, a_m$ إلى نفس العنصر بعد تطبيقها وعلى التالي عدداً منتهياً من المرات.

مثال:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الدور = (1 8 3 4 7 6)

تسمى دور او دور طولة 6 وهو عدد العناصر التي تحويها

1 → 8 → 3 → 4 → 7 → 6 ← 1

ويمكن أن يكتب الدور بالشكل:

= (8 3 4 7 6 1)

= (3 4 7 6 1 8)

= (4 7 6 1 8 3)

= (7 6 1 8 3 4)

= (6 1 8 3 4 7)

ويمكننا أن نكتب الدور ونبدأ من بأي عنصر من العناصر التي سيحملها التبيس وهي في هذا المثال هي: 1, 8, 3, 4, 7, 6

على سبيل المثال:

اكتب تبديل الدور $\alpha = (2\ 6\ 7\ 3\ 1)$

من S7 وعلى شكل تبديلة بالصورة القياسية

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

الدور الواحدي هو الدور التي طولة (1) كالمثال (5)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

أي تبديل يمكن كتابة على شكل جداء أدوار.

TEL:0931497960 -. Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: نأخذ في S_8:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 2\ 3)(4)(5\ 7\ 6)(8)$$

$$= (1\ 2\ 3)(5\ 7\ 6)$$

المناقلة (الانقلاب):

هو دور طولة 2 و أي دور طولة k يمكن كتابة على شكل جداء عدد من الانقلابات بالشكل التالي:

كل دور طولة k يمكن كتابة على شكل جداء انقلابات عددها $k-1$ أي إذا كان: $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ دور يمكن كتابة بالشكل:

$$(a_1\ a_2\ a_3 \dots a_k) = (a_1\ a_k)(a_1\ a_{k-1}) \cdots (a_1\ a_2)$$

- إذا أخذنا في المثال السابق الدور:

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$$

تعريف: نقول عن التبديل $\alpha \in S_n$ إنّه تبديل زوجي إذا كان بالإمكان كتابة على شكل جداء عدد زوجي من الانقلابات ونقول إنّه تبديل فردي إذا كان بالإمكان كتابة على شكل جداء عدد فردي من الانقلابات

وبما أن عدد التباديل الزوجية في S_n يساوي عدد التباديل الفردية يساوي إلى $\frac{|S_n|}{2}$ أي $\frac{n!}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في المثال السابق:

في S_9 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$= (1\ 8\ 3\ 4\ 7\ 6)$

$= (1\ 6)(1\ 7)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 8)$

كتبنا α على شكل جداء عدد من الانتقالات عددها 5

وبالتالي α تبديل مزدوج

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z