كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

جدول كايلي للعمليات الجبرية:

إذا كانت $G \neq \emptyset$ مجموعة جزئية خالية ومتنهية معرف عليها عملية جبرية $*$ عندئذٍ يمكن تمثيل هذه العملية $*$ المعرفة على المجموعة المتنهية G من خلال جدول يدعى جدول كايلي للعملية الجبرية $*$ وهو يتضمن ناتج أي عنصرين من G بأي ترتيب كان وفق العملية $*$ ومن خلال هذا الجدول يمكن دراسة خواص هذه العملية $*$ ومعرفة فيما إذا كانت الثنائية $(G, *)$ زمرة أم لا.

مثال: لتكن $G = \{a, b, c\}$ ولتعرف العملية $*$ على المجموعة G من خلال الجدول:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

هل $(G, *)$ زمرة وهل هي تبديلية؟

الحل:

① من خلال تعريف G نلاحظ أنّ $G \neq \emptyset$

② من خلال الجدول نلاحظ أنّه:

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$$

أي أن ناتج أي عنصرين من G هو من G وفق $*$ أي أن $*$ مغلقة على عناصر G

(3) من خلال الجدول نلاحظ أن $\star$ تجميعية على G أي أن:

$\forall x,y,z \in G : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

على سبيل المثال:

$(a \star a) \star b = a \star b = b$ &

$a \star (a \star b) = a \star b = b$ $\Big\} \Rightarrow (a \star b) \star b = a \star (b \star b)$

$(a \star b) \star c = b \star c = a = a \star (b \star c)$

$(c \star c) \star b = b \star b = c = c \star (c \star b)$

وهكذا مع أجل جميع عناصر G

(4) وجود العنصر الحيادي في G:

بالنسبة لـ $\star$ نلاحظ من الجدول الأول والسطر الأول أن:

$a \star a = a$

$a \star b = b$

$a \star c = c$

$b \star a = b$

$c \star a = c$

أي أنه يوجد عنصر حيادي $e = a$ حيث شرط الحيادي:

$\forall x \in G \ \exists e = a \in G ; \ x \star e = x \ \& \ e \star x = x$

(5) وجود العنصر النظير في G بالنسبة لـ $\star$:

نلاحظ من الجدول أنه: $a \star a = e$

وبنفس: $a^{-1} = a$

$b \star c = a = e \ \wedge \ c \star b = a = e$

وبنفس $b^{-1} \star = c \ \wedge \ c^{-1} = b$

وبالتالي حسب الجدول نجد أنه لكل عنصر $x \in G$ نظير x^{-1} في G

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

محقق شرط النظير : $\forall x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e$

أي أن الشرط التالي محقق :

$\forall x \in G \Rightarrow \exists x^{-1} \in G \; ; \; x^{-1} * x = e \wedge x * x^{-1} = e$

$\Leftarrow$ أي أن $*$ مغلقة و تجميعية ويوجد عنصر حيادي في G بالنسبة لـ $*$ و لكل عنصر من G نظير في G بالنسبة لـ $*$ إذاً : $(G, *)$ زمرة وهي تبديلية لأنّه وفقاً للجدول فإنّ :

$a * b = b \wedge b * a = b$

$a * c = c \wedge c * a = c$

$b * c = a \wedge c * b = a$

أي أنّ الشرط التالي محقق :

$\forall x, y \in G \Rightarrow x * y = y * x$

وبالتالي G زمرة تبديلية.

أو يمكن أن نكتب بشكلٍ آخر : $*$ تبديلية على عناصر G لأنّه وفقاً للجدول فإنّ العناصر المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي في الجدول متساوية

$a_{1,2} = a_{2,1} = b$

$a_{1,3} = a_{3,1} = c$

$a_{2,3} = a_{3,2} = a$

بعض الملاحظات حول جدول كايلي :

(1) يكون العنصر x من الزمرة G حيادياً إذا وردت في السطر المقابل له نفس عناصر السطر الأول ونفس الترتيب وفي العمود المقابل له نفس عناصر العمود الأول ونفس الترتيب.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) يكون العنصر x نظير إذا ورد العنصر الحيادي في كل من السطر المقابل للعنصر x في الجدول و في العمود المقابل للعنصر x من الجدول

(3) تكون العملية الثنائية الجبرية $*$ تبديلية إذا كانت العناصر المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي في الجدول متساوية.

مثال: أوجد جدول كايلي للعملية $\oplus$ المعرفة على عناصر Z_4

حل: $\forall x, y \in Z_4 \Rightarrow \overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x \oplus y}$

$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

العنصر	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
نظيره	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

خواص الزمرة:

نذكر خواص الزمرة $(G, *)$ من خلال النظرية التالية:

لتكن $(G, *)$ زمرة ما عندئذٍ فإن:

(1) الحيادي في G وحيد

(2) مقلوب (نظير) أي عنصر من G بالنسبة لـ $*$ وحيد.

(3) قانون الاختصار في G يحقق أي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$ab = ac \Rightarrow b = c$

$ba = ca \Rightarrow b = c$ أو

4) إذا كان $a \in G \Leftarrow (a^{-1})^{-1}$

5) إذا كان: $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ فإنّ:

$(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

6) كالة خاصة من (5) لدينا:

$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

7) لكل من المعادلتين:

$x * a = b$

$a * x = b$

حل وحيد في G وذلك من أجل a و b من G

البرهان:

1) نفرض أنّه يوجد عنصران حياديان في G بالنسبة لـ $*$ هما e و e'

عندئذٍ فإنّ: $e * e' = e' * e = e'$ ؛ و

نفرض أن العنصر الحيادي هو e في G

وبطريقة أخرى:

نفرض العنصر الحيادي هو e' في G ؛ $e * e' = e' * e = e$

$\Rightarrow e = e'$

العنصر الحيادي في G وحيد

2) إذا كان x عنصر كيفي من G ولنفرض x' و x'' نظيران لـ x في G بالنسبة لـ $*$ عندئذٍ فإنّ:

$x' * x = x * x' = e$

و $x'' * * = e = x * x''$

نفرض e العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $*$ لدينا:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$

نظير العنصر x في G وحيد

(3) لدينا: $a\,b = a\,c \Rightarrow$

نتعامل مع طرفي العلاقة السابقة من اليسار a^{-1} فنجد أنّ:

$a^{-1}\,a\,b = a^{-1}\,a\,c$

$e\,b = e\,c$

$\Rightarrow b = c$

ونثبت الطريقة كذلك أن:

(4) $\forall a \in G \Rightarrow$ فإنّ $a * a^{-1} = e$

$a^{-1} * a = e$

أي أنّ نقلوب a^{-1} هو a

أي أنّ: $(a^{-1})^{-1} = a$

(5) لبرهان أنّ:

$(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

لدينا:

$a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n * a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

$= a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * e * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

$= a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

$= a_1 * a_2 * \dots * e * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

$= a_1 * a_2 * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

$= a_1 * e * a_1^{-1} = a_1 * a_1^{-1} = e$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبنفس الطريقة:

$$(a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}) * (a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n)$$
$$= a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * \underbrace{a_1^{-1} * a_1}_{=e} * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n$$
$$= a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * \underbrace{a_2^{-1} * a_2}_{=e} * \dots * a_{n-1} * a_n = \dots\dots$$
$$= a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \underbrace{a_{n-1} * a_n}_{e}$$
$$= a_n^{-1} * a_n = e$$

وبالتالي:

$$(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$$

(6)
$$(a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$$
$$(b^{-1}\,a^{-1})(a\,b) = b^{-1}\,a^{-1}\,a\,b = b^{-1}\,b = e$$
$$(a\,b)(b^{-1}\,a^{-1}) = a\,b\,b^{-1}\,a^{-1} = a\,a^{-1} = e$$
$$\Rightarrow (a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$$

(7) لتأخذ المعادلة: $a * x = b$ حيث $a, b \in G$

إنّ للمعادلة السابقة حل في G لأنّه إذا سبقنا بطرفي المعادلة السابقة من اليسار بـ a^{-1} نجد أنّ:

$$a^{-1} * a * x = a^{-1} * b$$
$$\Rightarrow x = \underbrace{a^{-1}}_{G} * \underbrace{b}_{G} \in G$$

وهذا الحل وحيد لأنّه يفرض أنّ x' و x'' حلان لهذه المعادلة عندئذٍ فإنّ كلّ منها يحقق هذه المعادلة أي:

$$\left.\begin{matrix} a * x' = b \\ a * x'' = b \end{matrix}\right\} \; a * x' = a * x'' \Rightarrow$$

وبما أنّ الاختصار

$$x' = x''$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونفس الطريقة نبرهن أن المعادلة $b = x * a$ حلها وحيد.

مبرهنة: إذا كان $(G, *)$ زمرة ما و e عنصرها الحيادي

عندئذٍ فإنّ: $e^{-1} = e$

أي أن نظير الحيادي هو نفسه

(e باعتبار هو $e^{-1} * e = e * e^{-1} = e^{-1}$ ؛ العنصر الحيادي في G)

(e^{-1} باعتبار هو العنصر $e^{-1} * e = e * e^{-1} = e$ ؛ الحيادي في G)

مبرهنة: إذا كانت $(G, *)$ زمرة وكان a مقلوب b في هذه الزمرة عندئذٍ فإنّ b مقلوب a ويكون لدينا:

$$a * b = e$$

$$b * a = e$$

يعرف e العنصر الحيادي في G

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z