كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٣

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تكملة المثال السابق:

④ وجود العنصر الحيادي: إن العنصر $e=0$ هو العنصر الحيادي في $\mathbb{R}-\{1\}$ بالنسبة العملية $\star$ لأنه من جهة أولى فإنّ:

$e=0 \in \mathbb{R}-\{1\}$ ومنه جهة ثانية:

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}: x \star e = x \star 0 = x+0-x(0) = x$

و $e \star x = 0 \star x = 0+x-(0)(x) = x$

⑤ وجود العنصر النظير:

$\forall a \in \mathbb{R}-\{1\}$

نفرض أن a' هو العنصر النظير لـ a في $\mathbb{R}-\{1\}$ بالنسبة $\star$ إذاً:

$$a \star a' = e \Rightarrow a+a'-a.a' = 0$$

$$(1-a)a' = -a \Rightarrow a' = \frac{-a}{1-a}$$

من أجل كل عنصر a من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن العنصر $a' = \frac{-a}{1-a}$ هو نظير العنصر a في $\mathbb{R}-\{1\}$ بالنسبة العملية $\star$ لأنه من جهة أولى فإنّ:

$$a' = \frac{-a}{1-a} \in \mathbb{R}-\{1\}$$

ومنه جهة أخرى فإنّ:

$$a' \star a = \frac{-a}{1-a} \star a = \frac{-a}{1-a} + a + \frac{a^2}{1-a} = \frac{-a+a-a^2}{1-a} + \frac{a^2}{1-a}$$

$$= \frac{-a^2}{1-a} + \frac{a}{1-a} = 0 = e \Rightarrow a' \star a = e$$

وبما أن $*$ تبديلية فإن $a'*a = a*a' = e$

إذاً من ① ، ② ، ③ ، ④ ، ⑤ نجد أن $(\mathbb{R}-\{1\}, *)$ زمرة تبديلية.

مثال: ليكن $n \in \mathbb{Z}$ حيث $n > 1$ ولتكن:

$$\overline{Z_n} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

مجموعة صفوف التكافؤ لعلاقة التوافق $x \equiv y \pmod n$

ولنعرف على $\overline{Z_n}$ العملية $\oplus$ بالشكل التالي:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \overline{Z_n} : \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$$

والمطلوب برهان أن $(\overline{Z_n}, +)$ زمرة تبديلية.

الحل:

قبل أن نتحقق من شروط الزمرة لنثبت أن $\oplus$ تبديلية على عناصر $\overline{Z_n}$:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \overline{Z_n} : \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \bar{y} \oplus \bar{x}$$

(حسب تعريف العملية $\oplus$ ، $\overline{x+y} = \overline{y+x}$ لأن $+$ تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$)

لنثبت شروط الزمرة:

a) نلاحظ من تعريف $\overline{Z_n}$ أن $\overline{Z_n} \neq \emptyset$

b) $\oplus$ مغلقة على عناصر $\overline{Z_n}$ لأن:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \overline{Z_n} \Rightarrow \bar{x} \oplus \bar{y} \in \overline{Z_n}$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in \overline{Z_n} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Z}$$

بما أن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة.

$$\Rightarrow \exists \bar{r} \in \overline{Z_n} ; x+y \in \bar{r} \Rightarrow \overline{x+y} = \bar{r} \in \overline{Z_n}$$

$$\Rightarrow \overline{x+y} \in \overline{Z_n} \Rightarrow \bar{x} \oplus \bar{y} \in \overline{Z_n}$$

وهذه $\oplus$ مغلقة على عناصر $\overline{Z_n}$.

ⓒ العملية $\oplus$ معرفة جيداً على عناصر $\overline{Z}_n$ أي أن هذه العملية لها علاقة بأختيار ممثل الصف أي إذا فرضنا أن:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 \wedge \bar{y} = \bar{y}_1$$

$$\bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{y}_1$$ ولنبرهن أنّ:

$$\overline{x+y} = \overline{x_1+y_1}$$ أو لنبرهن أنّ:

بما أنّ: $\bar{x} = \bar{x}_1 \wedge \bar{y} = \bar{y}_1 \Rightarrow \bar{x} \in \bar{x}_1 \wedge \bar{y} \in \bar{y}_1$

$\Rightarrow x R x_1 \wedge y R y_1 \Rightarrow n \mid x - x_1 \wedge n \mid y - y_1$

$\Rightarrow n \mid (x_1 - x_1) + (y - y_1) \Rightarrow n \mid (x+y) \mp (x_1 + y_1)$

$\Rightarrow x+y \; R \; x_1+y_1 \Rightarrow x+y \in \overline{x_1+y_1}$

$\Rightarrow \overline{x+y} = \overline{x_1+y_1} \Rightarrow \bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{x}_1 \oplus \bar{y}_1$

وبهذه العملية $\oplus$ معرفة جيداً على عناصر $\overline{Z}_n$

ⓓ $\oplus$ تجميعية على عناصر $\overline{Z}_n$ لأنّ:

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \overline{Z}_n \Rightarrow (\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \overline{(x \oplus y)} \oplus \bar{z}$

$= \overline{(x \oplus y) \oplus z} = \overline{x + (y \oplus z)} = \bar{x} \oplus (\overline{y+z})$

$= \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$

$\Rightarrow (\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$

ⓔ وجود العنصر الحيادي: يوجد عنصر حيادي في $\overline{Z}_n$ بالنسبة للعملية $\oplus$ هو $\bar{0}$ لأنه من جهة أولى $\bar{0} \in \overline{Z}_n$

ومن جهة أخرى:

$\forall \bar{x} \in \overline{Z}_n : \bar{x} \oplus \bar{0} = \overline{x+0} = \bar{x}$

لأن العنصر الصفر هو العنصر الحيادي في Z

وبما أن $\oplus$ تبديلية فإنّ:

$\bar{x} \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{x} = \bar{x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ⓑ وجود العنصر النظير: يوجد في $\bar{Z}_n$ لكل عنصر $\bar{x} \in \bar{Z}_n$ نظير في $\bar{Z}_n$ بالنسبة للعملية $\oplus$ وهو $\bar{x}$ ولأنه:

من جهة أولى: $-\bar{x} \in \bar{Z}_n$ ومن جهة أخرى:

$$\forall \bar{x} \in \bar{Z}_n : \bar{x} \oplus -\bar{x} = \overline{x + (-x)} = \bar{0}$$

وبما أن $\oplus$ تبديلية إذاً:

$$\bar{x} \oplus (-\bar{x}) = -\bar{x} \oplus \bar{x} = \bar{0}$$

من a و b و c و d و e و f نجد أن $(\bar{Z}_n, \oplus)$ هي زمرة تبديلية

الزمرة المنتهية والزمرة غير المنتهية:

نقول عن الزمرة $(G, \star)$ واختصاراً الزمرة G إنها منتهية إذا كان عدد عناصرها منتهي أي:

$$|G| = \text{عدد عناصر } G < \infty$$

أي تحوي عدد منته من العناصر المختلفة عن بعضها البعض.

ونقول عن الزمرة G إنها غير منتهية إذا كانت G تحوي عدد غير منته من العناصر المختلفة عن بعضها

ملاحظات:

① إذا كانت $(G, \star)$ زمرة ما وكان $\star$ قانون الضرب (عملية الضرب) و e عنصرها الحيادي و $a \in G$ عنصر ما من G و n عدد صحيح موجب عندئذٍ نعرف القوة a^n بأنها عنصر من G يكتب بالشكل:

$$a^n = \underbrace{a \star a \star a \star \cdots \star a}_{n \text{ مرة}} \in G$$

حيث n هو عدد الطرفين في الطرف الأيمن ونصطلح على أن:

$a^0 = e$ تحقق الخواص التالية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$; $\forall n \in Z$

② $a^n * a^m = a^{n+m}$; $\forall n, m \in Z$

③ $(a^n)^m = a^{n*m}$; $\forall n, m \in Z$

[2] إذا كانت $(G, +)$ زمرة ما وكان $*$ قانون الجمع (عملية الجمع) و e عنصرها الحيادي، و $a \in G$ عنصراً ما من G و n عدد صحيح موجب عندئذٍ نعرف الضاعف na بأنه عنصر من G يكتب بالشكل:

$$na = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ مرة}} \in G$$

حيث n عدد الحدود ونصطلح على أن $0 \cdot a = e$

وكذلك فإنّ $n(a)$ تحقق الخواص التالية:

① $-na = n(-a)$ $\forall n \in Z$

② $\forall n, m \in Z$; $na * ma = (n+m)a$

③ $\forall n, m \in Z$; $m(na) = (n.m)a$

[3] عندما تكون $(G, *)$ زمرة وكانت $*$ هي العملية ضرب عندئذ يمكن أن نستبدلها بـ • أو فراغ.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة