كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

العمليات الجبرية وخواصها:

تعريف العملية الجبرية الثنائية: لتكن A مجموعة غير خالية أي $A \neq \phi$ ونعرف كل تطبيق معرف بالشكل: $* : A \times A \longrightarrow A$

$(a,b) \longrightarrow *(a,b)$

عملية جبرية ثنائية أو عملية جبرية أو تأليف تشكيلي داخلي أو عملية داخلية.

ملاحظات ومفاهيم أساسية:

1) بناءً على تعريف العملية الجبرية يمكننا القول أن العملية الثنائية المعرفة على A وهي $*$ ما هي إلا وسيلة (قاعدة) ترتبط أي عنصرين a,b من A وفق ترتيب معين بعنصر وحيد من A أي ترتبط $(a,b) \in A \times A$ بعنصر وحيد هو $*(a,b)$ من A.

2) يمكن أن نرمز للعملية الثنائية بأحد الرموز التالية مثل:

$\Delta, \square, \circ, \top, \perp$

3) نرمز لـ $*(a,b)$ وهي صورة العنصر (a,b) بأن $a*b$ ونسمي ناتج العنصرين a,b أو حاصل تشكيل العنصرين a,b وفق العملية $*$ في هذه الحالة نكتب $* : A \times A \longrightarrow A$

$\forall a,b \in A \; ; \; a*b$

4) نصطلح على تسمية العملية $*$ المعرفة على A بعملية ضرب وعلى $a*b$ بجداء العنصرين a,b ونقتصد بعملية

الضرب العادية المعرفة على المجموعات العددية.

(5) أحياناً عبر لا عن الرمز * نستخدم الرمز + للعملية الجديدة ونقصد بها عملية الجمع ولكن ليس عملية الجمع العادية المعرفة على المجموعات العددية وندعو a+b ناتج جمع العنصرين a,b من A.

(6) العملية * مغلقة على عناصر A إذا تحقق الشرط التالي $\forall a,b\in A: a*b\in A$ أي أنه مهما شكلنا أي عنصرين من A وفق العملية الجديدة * هو عنصر من A.

(7) يمكن تعريف أكثر من عملية جديدة على المجموعة الواحدة كما في الأمثلة التالية فمثلاً مجموعة الأعداد الحقيقية نعرف عليها عملية جمع وضرب والطرح.

مثال عن عملية جديدة: لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ونعرف عليها العملية * بالشكل التالي:

$\forall a,b\in\mathbb{R}: a*b=a+b-2$

هي عملية مغلقة على عناصر $\mathbb{R}$ لأن:

$\forall a,b\in\mathbb{R}: a*b=a+b-2\in\mathbb{R}$

$a+b\in\mathbb{R}\quad -2\in\mathbb{R}$
$a+b-2\in\mathbb{R}$

أي يحقق هذا الشرط التالي:

$\forall a,b\in\mathbb{R}: a*b\in\mathbb{R}$

بعض الخواص التي تحققها العملية الجديدة:

(1) الخاصة التبديلية: نقول أن العملية الجديدة * المعرفة على المجموعة غير الخالية A بأنها تبديلية على عناصر A إذا تحقق الشرط

$\forall a,b\in A\Rightarrow a*b=b*a$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② الزمرة التبديلية: نقول عن العملية الثنائية * المعرفة على المجموعة A بأنها تبديلية على عناصر A إذا حققت الشرط:

$\forall a,b,c \in A \Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

ونكتب $a*b*c$ بالقيمة المشتركة لكل الطرفين.

جميع العناصر المميزة بالنسبة للعملية الثنائية * المعرفة على مجموعة ما غير الخالية A:

① العنصر المحايد e: مجموعة ما غير خالية بالنسبة للعملية *، نقول أن العنصر $e \in A$ عنصر محايد (محايد) في A بالنسبة للعملية * المعرفة على A إذا تحقق الشرط:

$\forall a \in A; e*a = a$ ① $\wedge$ $a*e = a$ ②

ملاحظات:

① في حال عدم تحقق أحد الشرطين ① أو ② فإننا نقول أنه لا يوجد عنصر محايد بالنسبة للعملية * المعرفة على A.

② في حال كانت * تبديلية على عناصر A عندئذ يكفي البرهان أن e محايد بالنسبة لـ * المعرفة على A نكتفي ببرهان أحد الشرطين ① أو ②.

② العنصر النظير: في مجموعة ما غير خالية A بالنسبة للعملية * ليكن e عنصر محايد في A بالنسبة للعملية *، نقول عن $a \in A$ أنه نظير $a \in A$ إذا تحقق الشرطين:

$a*\grave{a} = e$ ①، $\grave{a}*a = e$ ②

ملاحظات:

① في حال عدم تحقق أحد الشرطين ① أو ② فإننا نقول أنه لا يوجد عنصر نظير أو مقلوب لـ a في A بالنسبة للعملية *

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1. في حال عدم وجود عنصر حيادي في A بالنسبة لـ * فلنا مباشرة أنه لا يوجد عنصر نظير (معلوم) للعنصر a في A بالنسبة لـ (*).

3. إذا كانت * تبديلية فكل عناصر A عندئذٍ لبرهان أن $a' \in A$ هو نظير (معلوم) $a \in A$ بالنسبة لـ (*) نكتفي ببرهان شرط واحد أي إما (1) أو (2)

4. في حال كانت (*) عملية ضرب نرمز لها أحياناً بالرمز (.) ونسمي a في هذه الحالة معلوم a في A بالنسبة للعملة * نرمز له بالرمز: $a \cdot a' = e$, $a' \cdot a = e$

جميع عناصر حيادي A بالنسبة لـ *

في حال كانت (*) عملية جمع نرمز لها بالرمز + ونسمي نظير a في A بالنسبة للعملة * نرمز له بالرمز (-a) ونكتب $a + (-a) = e$, $(-a) + a = e$

5. في حال كان كل من العنصرين a و a' في مجموعة A يحققان العلاقتين: $a * a' = e$, $a' * a = e$

فلنأخذ هذه الحالة كل من العنصرين a و a' نظير (معلوم) للآخر بالنسبة لـ * في A ولا نعني أن e عنصر حيادي في A.

مثال: ادرس خواص العملة الثنائية * المعرفة على Z بالشكل التالي: $\forall x,y \in Z ; x * y = x.y - 5$

الحل:

أ- العملة * مغلقة على عناصر Z

$\forall x,y \in Z \Rightarrow x * y \in Z$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لأن: $x * y = \underset{\in Z}{x.y} - \underset{\in Z}{5} \in Z$

العملية * مغلقة على عناصر Z.

(2) العملية * تجميعية على عناصر Z:

$\forall x,y,z \in Z \Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z)$

$(x*y)*z = (xy-5)*z = (xy-5)z - 5$

$= xyz - 5z - 5$

$x*(y*z) = x*(yz-5) = x(yz-5) - 5$

$= xyz - 5x - 5$

نلاحظ أن $(x*y)*z \neq x*(y*z)$

∴ العملية * ليست تجميعية على عناصر Z.

(3) وجود العنصر الحيادي في Z بالنسبة للعملية *.

لنفرض أن e هو عنصر حيادي في Z بالنسبة للعملية *

$\forall a \in Z : a*e = a \quad (1) \quad \wedge \quad e*a = a \quad (2)$

نأخذ (1) مثلاً:

$a*e = a$

$a.e - 5 = a \Rightarrow e = \frac{5+a}{a}$

نلاحظ من أجل $a = 2$ فإن $e = \frac{7}{2} \notin Z$ وبالتالي نستنتج بأن

عنصر حيادي فاطع لا يوجد عنصر حيادي في Z بالنسبة *

(4) وجود عنصر نظير: بما أنه لا يوجد عنصر حيادي في Z بالنسبة *

بالتالي لا يوجد عنصر نظير لـ a في Z.

الزمرة:

تعريف الزمرة: نقول عن مجموعة غير خالية G أنها مزودة بالعملية

البسيطة * أي التابعة: $(*, G)$ أنها زمرة إذا تحققت الشروط

التالية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $*$ مغلقة على عناصر G ... $\forall a,b \in G \Rightarrow a*b \in G$

② $*$ تجميعية على عناصر G ;

$\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)$

③ يوجد في G عنصر حيادي e من G تحقق الشرطين ;

$\forall a \in G : a*e = a$ ① $\wedge$ $e*a = a$ ②

بشكل رياضي نكتب ;

$\exists e \in G \; ; \forall a \in G : a*e = a \wedge e*a = a$

④ وجود المنصر النظير ; يوجد لكل عنصر $a \in G$ عنصر نظير $a' \in G$

بحيث يحقق ; $a'*a = e \wedge a*a' = e$

وبشكل رياضي ;

$\forall a \in G \; \exists a' \in G \; ; a*a' = e \wedge a'*a = e$

إذا كانت $(G,*)$ زمرة وكانت العملية $*$ تبديلية على عناصر G

عندئذ نقول أن $(G,*)$ زمرة تبديلية .

ملاحظة ;

① أحياناً نقول ببساطة أن الزمرة $(G,*)$ لتلك الزمرة G

② ملاحظة هامة في التطبيقات العملية ;

G زمرة $(\Leftarrow)$ ..... $G \neq \emptyset$

$*$ مغلقة على عناصر G

$*$ تجميعية $\quad\quad\quad\quad$ G

$*$ يوجد عنصر حيادي في G بالنسبة لـ $*$

$*$ لكل عنصر من G نظير بالنسبة لـ $*$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: إذا كانت العملية * معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالشكل التالي

$\forall x,y \in \mathbb{R}-\{1\} ; x*y = x+y-xy$

برهن على أن $(\mathbb{R}-\{1\}, *)$ زمرة تبديلية.

① $\forall x,y \in \mathbb{R}-\{1\} : x*y = x+y-xy = y+x-yx = y*x$

ضرب عملية جمع عملية تبديلية ∴ تبديلية

$\mathbb{R}-\{1\}$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

$\mathbb{R}-\{1\} \neq \phi$ من تعريفها

② مغلقة على عناصر $\mathbb{R}-\{1\}$ لأنه:

$\forall x,y \in \mathbb{R}-\{1\} : x*y = x+y-xy \in \mathbb{R}-\{1\}$

③ * تجميعية على عناصر $\mathbb{R}-\{1\}$ لأن:

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}-\{1\} : (x*y)*z = (x+y-xy)*z$

$= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z$

$= x+y-xy+z-xz-yz+xyz$

$x*(y*z) = x*(y+z-yz) = x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)$

$= x+y+z-yz-xy-xz+xyz$

$\therefore x*(y*z) = (x*y)*z$ بالتالي:

العملية * تجميعية على عناصر $\mathbb{R}-\{1\}$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة