كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

ملاحظات:

(1) إذا صفت الكلمة (a) فهي جميع الأعداد الصحيحة والتي تقبل القسمة على (n) والباقي صفر.

(2) وصف الكلمة (1) هي مجموعة جميع ... والباقي متساوي على (n) هو (1).

(3) صفت الكلمة (2) ... متساوي على (n) هو (2).

(n) صفت الكلمة (3) هي ... متساوي على (n) هو (3).

وبشكل عام نسمي علاقة الكلمة المعرفة في المثال السابق علاقة التوافق على Z ونرمز لها بالرمز $\equiv$ أو $=$ ونعرف هذه العلاقة بالشكل العام كما يلي:

إذا كان $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$ سنقول عرف العلاقة $R$ على Z بالشكل التالي:

$$\forall x,y \in Z;\ xRy \iff n \mid x-y$$

أي $xRy \iff n$ يقبل القسمة على $x-y$

أي $xRy \iff x-y = kn$ ; $k \in Z$

أو بالشكل:

$$xRy \iff x \equiv y \pmod{n}$$

ويقرأ بالشكل: x توافق y بالمقياس n

صفوف تكافؤ هذه العلاقة عدد n وهي:

$\overline{0} = \{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$

$\overline{1} = \{\dots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \dots\}$

$\overline{n-1} = \{\dots, -3n+(n-1), -2n+(n-1), -n+(n-1), n+(n-1), 2n+(n-1), 3n+(n-1), \dots\}$

تدعى مجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة وهي:

$Z/R = Z/\equiv_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\} = Z_n$

بمجموعة صفوف بواقي القسمة (البواقي) على n ونرمز لها بالرمز $Z_n$ أي $Z_n = Z/R$

أما المجموعة $Z_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ مجموعة البواقي لعدد صحيح a على n حيث: $a = qn + r \iff \frac{a}{n}$ ← المقسوم

باقي القسمة ← ناتج القسمة

المقسوم عليه

ملاحظة: علاقة التكافؤ السابقة نكتبها بالشكل

$xRy \iff n \mid x-y$

$xRy \iff x \equiv y \pmod n$

$23 \bmod 4 = 3$

$34 \bmod 6 = 4$ , $4 \equiv 34 \pmod 6$

علاقة الترتيب: لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة A فإن A تدعى العلاقة R علاقة ترتيب على المجموعة A إذا كانت R انعكاسية وثنائية ومتعدية.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن R علاقة ثنائية معرفة على مجموعة Z بالشكل الآتي:

$R=\{(a,b)\in Z\times Z \;;\; a-b\leq 0\}$

أو بالشكل: $\{aRb \iff a-b\leq 0 \;\forall a,b\in Z\}$

الحل: لنبرهن شروط علاقة الترتيب:

① R انعكاسية لأن: $\forall a\in Z \Rightarrow a-a\leq 0 \iff (a,a)R$

أو $\forall a\in Z \Rightarrow a-a\leq 0 \Rightarrow aRa$

② R متعاكسة $\forall a,b\in Z ; (a,b)\in R \wedge (b,a)\in R$

$\Rightarrow (a-b\leq 0)\wedge(b-a\leq 0) \iff (a\leq b)\wedge(b\leq a)$

$\iff a=b$

أو بالشكل:

$\forall a,b\in Z ; (aRb)\wedge(bRa) \Rightarrow (a-b\leq 0)\wedge(b-a\leq 0)$

$\iff (a\leq b)\wedge(b\leq a) \Rightarrow a=b$

③ R متعدية: نبرهن الشرط:

$\forall a,b,c\in Z ; (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$

$(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a-b\leq 0)\wedge(b-c\leq 0)$

$(a-b+b-c)\leq 0 \Rightarrow a-c\leq 0 \Rightarrow (a,c)\in R$

العلاقة متعدية.

$\Rightarrow$ R علاقة انعكاسية ومتعاكسة ومتعدية $\Rightarrow$ R علاقة ترتيب.

ملاحظة: أحياناً نسمي علاقة الترتيب المعرفة في ~~الفقرة~~ تعريف السابق قبل العلاقة علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A

سنطلق الأسماء الشهيرة على علاقة الترتيب

علاقة الإحتواء $\subseteq$ و $\geq$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خصائص التقارب:

1) إذا كانت R علاقة ترتيب مرفقة على مجموعة ما غير خالية A عندئذٍ:

① إذا كان x و y عنصرين من A فإننا نقول x و y متقاربان بالنسبة للعلاقة R أي xRy أو yRx

② إذا كان كل عنصرين من A متقاربين بالنسبة لعلاقة الترتيب R عندئذٍ نقول علاقة الترتيب R علاقة ترتيب كلي ونقول أن المجموعة A مرتبة كلياً وفق العلاقة R.

ملاحظة: ① لتكن علاقة الاحتواء ⊂ المعرفة على مجموعة الأجزاء لمجموعة ما غير خالية X ونعني P(X) هي علاقة ترتيب جزئي (لماذا)

ترتيب جزئي وظيفة

برهن أن العلاقة ⊂ المعرفة على P(X) حيث $P(X)=\{A ; A \subset X\}$ هي علاقة ترتيب ثم أثبت أن هذه العلاقة ليست علاقة ترتيب كلي. (البرهان بمثال)

② لتكن العلاقة ⊂ المعرفة على W هي علاقة ترتيب كلي

2) إذا كانت A مجموعة مرتبة بالعلاقة R (أي أن R علاقة ترتيب مرفقة على المجموعة غير الخالية A) عندئذٍ:

① نقول العنصر $a \in A$ عنصر أول (أصغر) في A إذا كان $\forall x \in A \; ; \; aRx$ (أي أن a سبقت جميع عناصر A)

② نقول العنصر $b \in A$ عنصر أخير في A إذا كان $\forall x \in A \; ; \; xRb$ (أي أن جميع عناصر A سبقت b)

③ نقول العنصر $d \in A$ عنصر أصغري في A إذا كان

$\forall x \in A \; ; \; xRd \Rightarrow x=d$ ~~$\forall x \in A \; ; \; xRd$~~



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) نقول العنصر $c \in A$ عنصر أعظمي في A إذا كان

$\forall x \in A \; cRx \Rightarrow x = c$

مبدأ الترتيب الجيد ينتج العنصر الأول هو العنصر الأصغري

" " الأمين " " الأعظمي

بعض الأمثلة:

- إذا العنصر $a = 0$ هو عنصر أول في المجموعة $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة للعلاقة الترتيب $\leq$ لأن $\forall x \in \mathbb{Z}^+ \; 0 \leq x$ أي أن العنصر (0) سبقت جميع عناصر $\mathbb{Z}^+$ $\Leftarrow$ (يوجد في $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة للعلاقة الترتيب $\mathbb{Z}^+$ عنصر أول وهو (0) ولكن لا يوجد عنصر أعظم
- و بالنسبة للعلاقة الترتيب $\subseteq$ المعرفة على $P(X)$ فإنه يوجد عنصر هو أول هو $\emptyset$ (لماذا) و عنصر أعظم هو $X$ (لماذا)
- يوجد في $\mathbb{Z}$ عنصر أعظم هو (0) لأن $\forall x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \; x \leq 0$ ولكن يوجد عنصر أول في $\mathbb{Z}$ بالنسبة للعلاقة $\leq$
- إذ $d = 0$ هو عنصر أصغري في $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة للعلاقة الترتيب $\leq$ لأنه $\forall x \in \mathbb{Z}^+ \; 0 \leq x \Leftarrow x = 0$
- وإذا $c = 0$ هو عنصر أعظمي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة للعلاقة ترتيب $\leq$ لأنه: $\forall x \in \mathbb{Z} \; x \leq 0 \Leftarrow x = 0$

بعض المفاهيم الأساسية في مجموعة الأعداد الصحيحة:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

تعريف: إذا كان $a, b$ عددين صحيحين وكان $b \neq 0$ عندئذ نقول أن $b$ قاسم لـ $a$ أو عامل لـ $a$ أو مضاعف $b$ أو $a$ يقبل القسمة على $b$ في $\mathbb{Z}$ إذا وجد عدد صحيح $c$ بحيث يكون $a = bc$ ونرمز لذلك $b \mid a$ ونقرأ $b$ يقسم $a$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: ليكن $a \neq 0$ عدد صحيح مختلف عن (0) نسمي a عدداً
بسيطاً في Z إذا كانت $a \neq \pm 1$ وتوابع العدد a
هي $(\pm a, \pm 1)$

ملاحظة: أي عدد مختلف عن (0) يقسم العدد صفر (هو قاسم
لصفر في Z)، لأنه:

$$\forall a \in Z ; a \neq 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 0$$

مواربة القسمة: إذا كان a و b عددين صحيحين حيث
$b > 0$ عندئذٍ يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r في Z
بحيث يكون $a = qb + r$ و $0 \leq r < b$

a: مقسوم عليه، b: مقسوم، q: ناتج القسمة، r: باقي القسمة

النظرية الأساسية في الحساب:

كل عدد صحيح موجب إما يساوي (1) أو يكتب بشكل وحيد كجداء
أعداد بسيطة موجبة. أمثلة: $7 = 1 \times 7$ عدد بسيط
$14 = 2 \times 7$ ليس كذلك.

القاسم المشترك الأعظم:

ليكن a و b عددين صحيحين مختلفين عن الصفر عندئذٍ نعرف القاسم
المشترك الأعظم للعددين بأنه أكبر عدد صحيح موجب يقسم كلاً من
a و b في آنٍ واحد ونرمز له بالرمز gcd أو $(gcd(a,b))$

ملاحظة: $gcd = 1$ عندئذٍ نقول العددين أوليان فيما بينهما

ونعرف القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين مختلفين عن الصفر موجود
ووحيد

إذا كان p عدداً بسيطاً يقسم $a \cdot b$ عندئذٍ صحيحاً فإن p يقسم العدد a
أو يقسم العدد b على الأقل في Z



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z