كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال: لتكن $A=\{a,c,d\}$

والمطلوب: ① أوجد $P(A)$ وما هو عدد عناصرها؟

② أوجد بنية من $P(A)$ للمجموعة A.

③ // // تغطية من $P(A)$ // //.

ملاحظة: ① إذا كانت $a\in A$ فإن: $\{a\}\subset A$ و $\{a\}\in P(A)$

ولا نكتب $\{a\}\not\in A$ أو $\{a\}\not\subseteq P(A)$

② $B\in P(A) \iff B\subset A$

الحل: ①

$$P(A)=\{\phi,\{a\},\{c\},\{d\},\{a,c\},\{a,d\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$$

عدد العناصر

$|P(A)|=2^{|A|}=8$ و $|A|=3$

نلاحظ أن: $\{d\}\subset A \Rightarrow \{d\}\in P(A)$

$\{c,d\}\subset A \Rightarrow \{c,d\}\in P(A)$ } توضيح للملاحظة فقط

② يمكن أن نوجد عدة بنيات للمجموعة A:

البنية الأولى: عناصر البنية $T=\{A_1,A_2,A_3\}$

$=\{\{a\},\{c\},\{d\}\}=\{a,c,d\}$

وهي تحقق:

① أي عنصر من عناصر البنية T لا يساوي الخالية

أي أن: $A_i\neq\phi$ و $i=1,2,3$

(2) $A_i \cap A_j = \phi \quad ; \quad i = 1,2,3$

$j = 1,2,3$

(3) $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a\} \cup \{c\} \cup \{d\}$ ← اجتماع

$= \{a, c, d\} = A$

كذلك فإن $T' = \{A_1, A_2\} = \{\{c\}, \{a,d\}\}$

$= \{c, a, d\} = A$

تجزئة للمجموعة A لأن:

(1) أي عنصر من عناصر التجزئة T' لا يساوي الخالية

أي أن: $A_i \neq \phi \quad ; \quad i = 1,2$

(2) $A_i \cap A_j = \phi \quad ; \quad i = 1,2 \quad \wedge \quad j = 1,2$

(3) $\bigcup_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cup A_2 = \{c\} \cup \{a,d\}$

$= \{c, a, d\} = A$

وكذلك توجد تجزئات أخرى للمجموعة A.

(3) توجد عدة تغطيات للمجموعة A نذكر منها:

التغطية الأولى: $T = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{a\}, \{c\}, \{d\}\}$

$= \{a, c, d\} = A$

أي أن: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$

التغطية الثانية لـ A:

$T' = \{A_1, A_2\} = \{\{c\}, \{a,d\}\} = \{a, c, d\}$

أي أن $A_1 \cup A_2 = A$

عناصر التغطية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعض المفاهيم الأساسية في المجموعات والعلاقات الثنائية:

تعريف الجداء الديكارتي:

لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين نرمز للجداء الديكارتي للمجموعتين A و B بالرمز A×B ونعرفه بأنه المجموعة:

$$A\times B=\{(a,b)\ ;\ a\in A \wedge b\in B\}$$

أي هو مجموعة الثنائيات (a,b) حيث a من A ونسميها المركبة الأولى و b من B ونسميها المركبة الثانية (أو الثاني)

ملاحظة: $(a,b)=(a',b') \Leftrightarrow a=a' \wedge b=b'$

والجداء الديكارتي لمجموعتين A و B يتمتع بالخواص الآتية:

1) الجداء الديكارتي عملية غير تبديلية أي أنه: $A\times B \neq B\times A$

2) " " تجميعية أي أنه: $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

3) " توزيعي على الاجتماع من اليسار واليمين

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

4) وكذلك الخاصة مضافة من أجل الجداء الديكارتي والتقاطع

أي أن: $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$

5) وكذلك بالنسبة للفرق والفرق التناظري:

حيث: $\forall A,B,C$

6) كذلك نجد أن: $A\times\emptyset=\emptyset$

$$\emptyset\times A=\emptyset$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعميم للجداء الديكارتي:

لتكن: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أسرة من المجموعات

نرمز للجداء الديكارتي لهذه المجموعة بالرمز: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

ونعرفه بأنه المجموعة:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{x = (a_1, a_2, \ldots, a_n) ; a_i \in A_i \wedge i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ونسمي أي عنصر من $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ أنه عبارة عن عنصر نموذجي n مركبة من المركبة i والترتيب i تحوي العنصر a_i وهو من المجموعة A_i.

العلاقات الثنائية

تعريف العلاقة الثنائية: لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين، نسمي كل مجموعة جزئية R من الجداء الديكارتي $A \times B$ علاقة ثنائية مستقرة منطلقاً A ومستقرها B أي علاقة ثنائية من $A \to B$ ونعبر رياضياً بالشكل التالي:

$$R = \{(a, b) ; a \in A \wedge b \in B\} \subseteq A \times B$$

تعريف العلاقة العكسية:

لتكن R علاقة ثنائية من A إلى B حيث A و B مجموعتين غير خاليتين، نرمز للعلاقة العكسية للعلاقة الثنائية R بالرمز R^{-1} ونعرفها بأنها علاقة ثنائية من B إلى A تضم جميع الثنائيات (b, a) من $B \times A$ بحيث أن (a, b) ثنائية في $A \times B$ أي أن:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A ; (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن $A=\{a, c, d\}$ $B=\{10, 15\}$

① أوجد $A\times B$ ثم $B\times A$ ماذا نستنتج

② أوجد علاقة ثنائية R من A إلى B.

③ العلاقة العكسية للعلاقة R^{-1} من ~~A~~ B الطلب الثاني

الحل: ①

$$A\times B=\{(a,10),(a,15),(c,10),(c,15),(d,10),(d,15)\}$$

$$B\times A=\{(10,a),(10,c),(10,d),(15,a),(15,c),(15,d)\}$$

نلاحظ أن $A\times B\neq B\times A$ أي أن الجداء الديكارتي عملية غير تبديلية.

② ملاحظة: إذا كانت A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n و B مجموعة غير خالية عدد عناصرها m حيث n و m عددان أصغر تماماً من اللانهاية $(n<\infty \wedge m<\infty)$ عندئذٍ يكون عدد عناصر الجداء الديكارتي $(A\times B)$ يساوي إلى $n\times m$

② $R=\{(a,10),(d,15),(a,15),(c,10)\}\subseteq A\times B$

علاقة ثنائية من A إلى B.

③ $R^{-1}=\{(10,a),(15,d),(15,a),(10,c)\}\subseteq B\times A$

العلاقة العكسية لـ R علاقة ثنائية من B إلى A

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

العلاقة الثنائية على مجموعة ما:

عندما A=B عندئذٍ نسمي العلاقة الثنائية R علاقة ثنائية على المجموعة A وسيكون تعاملنا في دراستنا القادمة مع هذا النوع من العلاقات وإلا إذا ذكرنا عكس ذلك.

ويمكننا رياضياً أن نعبر عن علاقة R على مجموعة A بالشكل

$$R=\{(a,b)\ ;\ a,b\in A\}\subseteq A\times A$$

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على مجموعة A أي

$$R=\{(a,b)\ ;\ a,b\in A\}\subseteq A\times A$$

ليكن a و b عنصران من A عندئذٍ نصادف إحدى الحالتين الآتيتين

1) إذا كان $(a,b)\in R$ عندئذٍ نقول أن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة R ونكتب عندئذٍ $aRb\ ;\ a,b\in A$

ونكتب عندئذٍ رياضياً:

$$(a,b)\in R \Longleftrightarrow aRb\ ;\ a,b\in A$$

2) إذا كان $(a,b)\notin R$ عندئذٍ نقول أن العنصر b لا يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة R ونكتب عندئذٍ

$$a\not R b\ ;\ a,b\in A$$

أو

$$a\not R b\ ;\ a,b\in A$$

ويمكننا أن نقول أن العلاقة R غير محققة بين العنصرين a و b من A ونعبر عن هذه الحالة رياضياً بالشكل:

$$(a,b)\notin R \Longleftrightarrow a\not R b\ ;\ a,b\in A$$

أو

$$(a,b)\notin R \Longleftrightarrow a\not R b\ ;\ a,b\in A$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: نستنتج مما سبق أن العلاقة R المعرفة على المجموعة غير خالية A ليس من الضروري أن ترتبط أي عنصر من A وفقاً أي أن ليس كل عنصر من A مرتبطين وفق العلاقة R.

العلاقة الفارغة:

إذا كانت $R=\{(a,a)\ ;\ a\in A\}\subset A\times A$ علاقة ثنائية معرفة على A و $A\neq\phi$ عندئذ نسمي R علاقة فارغة.

ملاحظة: يمكن تعريف أكثر من علاقة ثنائية على المجموعة الواحدة غير الخالية.

مثال: إذا أخذنا مجموعة الأعداد الصحيحة Z فيمكننا أن نعرف على Z أكثر من علاقة ثنائية مثل: الجمع والضرب والقسمة والطرح

هو أحد العلاقات الثنائية:

إذا كانت R علاقة ثنائية معرفة على مجموعة ما غير خالية لتكن A عندئذ فإن R تحقق بعض الخواص نذكر منها

1) الخاصة الإنعكاسية: نقول عن علاقة R أنها إنعكاسية إذا حققت الشرط التالي:

$\forall a\in A\Rightarrow (a,a)\in R$

أو الشرط:

$\forall a\in A\Rightarrow aRa$

أي أن كل عنصر a من A يرتبط بنفسه.

2) الخاصة التناظرية: نقول عن علاقة R أنها تناظرية إذا حققت الشرط:

$\forall a,b\in A\ ;\ aRb\Rightarrow bRa$

أو الشرط:

$\forall a,b\in A\ ;\ (a,b)\in R\Rightarrow (b,a)\in R$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي إذا كان a و b عنصران من A وكان a يرتبط بـ b
وفق R فإن b يرتبط بـ a وفق R.

3) العلاقة التماثلية: نقول عن العلاقة R أنها تماثلية
إذا حققت الشرط:

$$\forall a,b \in A;\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$$

أو الشرط:

$$\forall a,b \in A;\ aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$$

أي: إذا كان a و b عنصران من A وكان a و b
مرتبطان وفق R أيضاً فالعنصران متساويان

4) التامة المتعدية: نقول عن R أنها متعدية إذا حققت
الشرط التالي:

$$\forall a,b,c \in A;\ (a,b) \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

أو الشرط:

$$\forall a,b,c \in A;\ (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$$

أي إذا كانت a,b,c ثلاث عناصر من A وكان
a و b مرتبطان وفق R و b و c مرتبطان وفق R
فإن a و c مرتبطان وفق R.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z