كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مفردات البنى الجبرية (1) (نظرية الزمر)

- بعض الأفكار الأساسية عن المجموعات
- العلاقات الثنائية والعمليات الثنائية على المجموعات
- الزمر
- الزمر الجزئية
- الزمر الدورية والزمر الدورية الجزئية
- الزمر الجزئية الناظمية وزمرة القسمة
- الهومومورفيزمات

بعض المراجع: البنى الجبرية (1) د. محمد البوشي (تشرين)
البنى الجبرية د. حسن سنكري (تشرين)
وأي كتاب عن الجبر يحوي أفكار البنى الجبرية (1)

جبر المجموعات

مفهوم المجموعة وتعريفها

تعريف المجموعة: هي تجمع من كائنات من الأشياء أو رموز من مجموعة من الأشياء تدعى مجموعة وتدعى هذه الرموز عناصر لهذه المجموعة

أو يمكن أعتبار المجموعة: هي عبارة عن تجمع بعض الكائنات التي تتصف بصفة خاصة

أمثلة: 1. مجموعة الأعداد الصحيحة ($\mathbb{Z}$)

2. طلاب السنة الثانية رياضيات في جامعة طرطوس

3- أقسام كلية العلوم في جامعة طرطوس.

4- مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 1 = 0$ من $\mathbb{R}$ هي

$\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

طرق تعيين المجموعة: تعين المجموعة بطريقتين:

① طريقة القائمة: مثل لحلول المسألة عن هذه الطريقة نذكر أن: لحل المجموعة هي تجمع الأشياء أو الكائنات أو الوحدات) فإن هذه الوحدات أو الأشياء نسمى عناصر هذه المجموعة حيث نرمز دوماً لهذه المجموعة بأحرف أجنبية كبيرة $\{A, B, C, \ldots\}$ ولعناصرها بأحرف أجنبية صغيرة $\{a, b, c, \ldots\}$.

فإذا كان العنصر a عنصراً من المجموعة A عندئذٍ نقول أن العنصر a ينتمي للمجموعة A ونرمز للانتماء بالرمز $a \in A$

أما إذا كان العنصر غير موجود في A عندئذٍ نكتب $a \notin A$

ونقرأ أما لا ينتمي إلى المجموعة A.

لتعيين مجموعة A بطريقة القائمة: نضع جميع عناصر المجموعة بين قوسين كبيرين من الشكل $\{\ \}$ مع وضع فواصل فيما بينها دون تكرار العنصر أكثر من مرة.

أمثلة:

$A = \{$ أحمر، أخضر، أصفر $\}$ مجموعة ألوان إشارة المرور.

$Z^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② طريقة القاعدة والصفة المشتركة:

نعبر هنا عن عناصر المجموعة بوضع القوسين { } وفي داخلها نذكر عنصر x من المجموعة والصفة ثم نذكر أن x تحقق الصفة المعينة.

مثال: مجموعة ألوان إشارة المرور:

$A = \{ x : x$ لون من ألوان إشارة المرور $\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{ x : x$ عدد صحيح موجب $\}$ = مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

$B = \{ x : x$ طالب رياضيات في جامعة طرطوس $\}$ = مجموعة طلاب رياضيات جامعة طرطوس

مثال: عبر عن المجموعة التالية بطريقة القائمة وطريقة القاعدة: $A = \{ x : x^2 - 1 = 0$ مجموعة حلول المعادلة $\}$

في $\mathbb{R}$

طريقة القاعدة: $A = \{ x : x^2 - 1 = 0$ و $x \in \mathbb{R} \}$

طريقة القائمة: $A = \{ -1, +1 \}$

أنواع المجموعات الخاصة:

1. المجموعة الخالية: ونرمز لها $\emptyset$ وهي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر. مثال: مجموعة حلول المعادلة $x^2 + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$ هي مجموعة خالية.

ملاحظة: يرمز للخالية بالرمز $\{\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- المجموعتين المتساويتين: نقول عن المجموعتين A و B أنهما متساويتان ونكتب ذلك بالشكل $A=B$ إذا كان كل عنصر x من A هو عنصر من B وبالعكس إذا كان كل عنصر x من B هو عنصر من A

أي: $A=B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

أو $A=B \iff x \in A \iff x \in B \quad \forall$

3- تضمين المجموعة الجزئية:

نقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية من B إذا كان كل عنصر من A هو عنصر من B عندئذٍ نكتب $A \subset B$ ونقرأها A محتواة في B أو تساويها.

أما $A \subset B$ نقرأها A محتواة تماماً في B.

ورياضياً نكتب $A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B$

ملاحظة: نرمز للمجموعة الكلية أحياناً بالرمز Ω أو X وهي المجموعة التي تحوي جميع المجموعات المحتواة مثلاً (الجزئية منها) وهي خاصة حسب المجموعة التي نتعامل معها.

4- المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية:

نقول عن مجموعة A أنها مجموعة منتهية إذا كان عدد العناصر منتهٍ أي $|A|=n<\infty$ عدد عناصر A

وإذا لم يتحقق ذلك قلنا عن المجموعة أنها غير منتهية

أمثلة: $A=\{10, 11, 12, \ldots, 20\}$

مجموعة منتهية لأن $n<\infty$ عدد عناصر A

أما مجموعة حدود المتتالية التي حدها العام

$a_n = n$ و $n \in \mathbb{N}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي: $A_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ مجموعة غير منتهية

ومجموعة الأعداد الصحيحة مجموعة غير منتهية

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$
$$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

و

$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية غير المنتهية.

ملاحظة المجموعة ϕ مجموعة منتهية لأنه عدد عناصرها يساوي الصفر.

العمليات على المجموعات:

1- الاجتماع والتقاطع:

نرمز للاجتماع مجموعتين A و B بـ $A \cup B$ ونعرفه بأنه اجتماع العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين A و B ونكتبه رياضياً:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

أما تقاطع A و B فنرمز له بـ $A \cap B$ ونعرفه بأنه مجموعة العناصر المشتركة فقط بين A و B ونكتب رياضياً:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

ملاحظة المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من أي مجموعة، أي إذا كانت A مجموعة ما فإن $\phi \subset A$

حيث $A \cup \phi = \phi \cup A = A$ و $\phi \cap A = A \cap \phi = \phi$

إذا كانت $A \subset \Omega$ فإن: $A \cup \Omega = \Omega$

و $A \cap \Omega = A$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- الفرق والفرق التناظري: ليكن مرفوع A و B

نرمز له بالرمز A - B بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي لـ A

ولا تنتمي لـ B ونكتب رياضياً:

$$A - B = \{ x ; x \in A \wedge x \notin B \}$$

أما: $$B - A = \{ x ; x \in B \wedge x \notin A \}$$

حيث: $A - B \neq B - A$

ملاحظة: $A - \phi = A$

الفرق التناظري لـ A و B نرمز له بالرمز $A \Delta B$

ونعرفه بأنه اجتماع $A - B$ و $B - A$ أي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

حيث: $A \Delta B = B \Delta A$

ملاحظة: $A \Delta \phi = ?$

$A \Delta \Omega = ?$

المجموعة الكلية

3- متممة مجموعة: نرمز لمتممة المجموعة A بالرمز $\bar{A}$

ونعرفها بأنها مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة Ω ولا تنتمي للمجموعة A أي $\bar{A} = \Omega - A$

$$\bar{A} = \{ x ; x \notin A \Leftrightarrow x \in \Omega - A \}$$

$$\Omega - A = \Omega \cap \bar{A}$$

$$\bar{\phi} = \Omega$$

$$\bar{\Omega} = \phi$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مجموعة الأجزاء:

إذا كانت Ω مجموعة ما عندئذٍ نعرف مجموعة الأجزاء للمجموعة Ω ونرمز لها بالرمز $P(\Omega)$ أو 2^{Ω} بأنها مجموعة جميع المجموعات الجزئية الممكنة من Ω، وإذا كانت Ω مجموعة منتهية وعدد عناصرها n عندئذٍ فإن عدد عناصر المجموعة $P(\Omega)$ أو 2^{Ω} هو 2^n

$$|P(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^n$$

مثال: إذا كانت $\Omega = \{3, 7, 11\}$

① أوجد $P(\Omega)$ ② استنتج عدد عناصر $P(\Omega)$

① $P(\Omega) = \{\phi, \{3\}, \{7\}, \{11\}, \{3,7\}, \{3,11\}, \{7,11\}, \{3,7,11\}\}$

② لأن $|\Omega| = 3 < \infty$

$$|P(\Omega)| = 2^3 = 8$$

نتيجة من التعريف: $A \in P(\Omega) \iff A \subset \Omega$

نرجع للمثال السابق:

$$A = \{3\} \in P(\Omega) \iff A = \{3\} \subset \Omega = \{3, 7, 11\}$$

$$A_2 = \{3, 7\} \in P(\Omega) \iff A_2 = \{3, 7\} \subset \Omega$$

$$\phi \in P(\Omega) \iff \phi \subset \Omega$$

لاحظ دوماً أن $P(\Omega) = \{A ; A \subset \Omega\}$

أو $A \in P(\Omega) \iff A \subset \Omega$

من أجل $a \in \Omega$ فإن $\{a\} \subset \Omega$ وبالتالي $\{a\} \in P(\Omega)$

ولاحظ أن $a \in \Omega$ فإننا لا نستطيع القول أن $a \in P(\Omega)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال عن تجزئة مجموعة: إذا كانت $\Omega = \{3, 7, 11\}$

$$P(\Omega) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$$
$$= \{\phi, \{3\}, \{7\}, \{11\}, \{3,7\}, \{3,11\}, \{7,11\}, \{3,7,11\}\}$$

إذا أخذنا المجموعات: $A_2 = \{3\}$ و $A_3 = \{7\}$ و $A_4 = \{11\}$

نلاحظ أن: $A_2 \cap A_3 = \phi$

$A_2 \cap A_4 = \phi$

$A_3 \cap A_4 = \phi$

وأيضاً: $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{3\} \cup \{7\} \cup \{11\}$

$= \{3, 7, 11\} = \Omega$

عندئذٍ ندعو $T = \{A_1, A_3, A_4\} = \{A_i\}_{i \in I}$ حيث $I = \{2, 3, 4\}$ تجزئة للمجموعة Ω

و ندعو A_2, A_3, A_4 عناصر هذه التجزئة

وميزة هامة أخرى نلاحظ أن $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$

ولكل ندعو T تغطية لـ Ω

تعريف: تجزئة مجموعة لكن $T = \{A_i\}_{i \in I}$

أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة غير الخالية Ω

ندعو الأسرة T تجزئة لمجموعة Ω إذا حققت الشروط التالية:

1) من أجل أي $i, j \in I$ فإن $A_i = A_j$ أو $A_i \cap A_j = \phi$

2) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

3) $A_i \neq \phi \quad \forall i \in I$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نسمي عناصر T عناصر البنية T

ملاحظة: إن الشرط الأول من شروط التعريف السابق يعني أن أي عنصرين من هذه البنية إما متساويان أو منفصلان (تقاطعهما خالي).

تعريف تغطية مجموعة:

لتكن $T = \{A_i\}_{i \in I}$ أسرة من مجموعات البنية

من المجموعة غير الخالية Ω نسمي T تغطية لـ Ω إذا كانت $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ نسمي عناصر T عناصر تغطية T

تعريف هام:

أوجد بنية المجموعة $\mathbb{N}$ حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة