كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة :السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الاشتقاق والتفاضل:

تعرّف قيمة المشتق للتابع $f(x)$ و الذي يرمز له بالرمز $f'(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

* $dy = f'(x)\,dx$ نسمي dy تفاضل y أو dx تفاضل x ومنه نعرّف تفاضل تابع $y = f(x)$ بأنه مشتق التابع $f(x)$ مضروب بتفاضل المتحول المستقل x.

التابع المشتق: ليكن f تابعاً معرّفاً على مجال I محتوى في $\mathbb{R}$ ولتكن x_0 نقطة من I، نقول أنّ f هي المشتقة للتابع f عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين:

1) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ 2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

عندئذٍ نقول أنّ f اشتقاقي عند x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$

* عندما يكون f اشتقاقي عند كل نقطة من مجال I ونقول أنّ f اشتقاقي على I.

مثال: إذا كان التابع $f(x) = x^2 - 2x$ استخدم تعريف مشتق تابع لإيجاد $f'(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0 - 2 = 2x_0 - 2$$

القوانين الأساسية للاشتقاق:

1) $\frac{d}{dx}(C) = 0$ 2) $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

3) $\frac{d}{dx}(C \cdot f) = C \cdot \frac{df}{dx}$ 4) $\frac{d}{dx}(f \mp g) = \frac{df}{dx} \mp \frac{dg}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + \frac{dg}{dx} \times f$

6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g'}$; 7) $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$

8) $f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

9) $f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot g'(x)$

10) $f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

11) $f(x) = a^x$; $a > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$.

12) $f(x) = (h \circ g)(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$.

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, 2) $f(x) = \left(\frac{3x+5}{2}\right)^5$

3) $f(x) = \sqrt{4x^3 + 5x}$, 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x}} - (x+2)(3x^2+4)^3$

الحل:

1) $f'(x) = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) $= 5 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3x+5}{2}\right)^4$.

3) $f(x) = \sqrt{4x^3+5x}$

$f'(x) = \frac{12x^2+5}{2\sqrt{4x^3+5x}}$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x}} - (x+2)(3x^2+4)^3$

$= -\frac{1}{2}(5x)^{-\frac{3}{2}} - \left((3x^2+4)^3 + 3 \times 6x (3x^2+4)^2 (x+2)\right)$.

$= -\frac{5}{2\sqrt{(5x)^3}} - (3x^2+4)^3 - 18(x^2+2x)(3x^2+4)$.

مشتقة التوابع العكسية.

التابع f متصف رمستمر ومطرد تماماً على I عندئذٍ يوجد لـ تابع عكسي.

* التابع f في نقطة x_0 من المجال I مشتق محدود $f'(x_0)$ مغاير للصفر عندئذٍ يوجد في النقطة المقابلة $y_0 = f(x_0)$ مشتق للتابع العكسي $f^{-1}(y_0)$ متصف بالعلاقة $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

مشتقة التوابع المثلثية

y	$\frac{dy}{dx}$
$\arcsin x = \sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lvert x\rvert < 1$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lvert x\rvert < 1$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

~~$\cos^{-1}(u)$~~	~~$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$~~
$\cos^{-1}(u)$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u\rvert<1$
$\sin^{-1}(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u\rvert<1$
$\tan^{-1}(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\cot^{-1}(u)$	$\frac{-u'}{1+u^2}$

تمرين: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية.

1) $y = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$; $2 = \tan^{-1}(\tan x)$.

الحل

1) $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times x}{1+x^2}$

$\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}$

$= \frac{\lvert}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \times \frac{\lvert}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}$

2) $y' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مشتقة التوابع القطعية

* $(shu)' = u'.chu$; * $(chu)' = u'.shu$.

* $(thu)' = u'.\frac{1}{ch^2u}$; * $(cthu)' = \frac{-u'}{sh^2u}$.

مشتقات التوابع القطعية العكسية

1) $(sh^{-1}u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$; 2) $(ch^{-1}u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$.

3) $(th^{-1}u)' = \frac{u'}{1-u^2}$; 4) $(cth^{-1}u)' = \frac{-u'}{1-u^2}$.

مثال: اوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية:

1) $y = \ln(chx)$; 2) $y = \sqrt{\sin x + shx}$.

3) $y = sh^{-1}(\sqrt{x})$; 4) $y = (x^2 ch^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$.

الحل:

1) $y = \ln(chx) \Rightarrow y' = \frac{shx}{chx}$

2) $y = \sqrt{\sin x + shx} \Rightarrow y' = \frac{\cos x + chx}{2\sqrt{\sin x + shx}}$.

3) $y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}$.

4) $\frac{1}{2}(x^2.ch^{-1}x)^{-\frac{1}{2}} \times (2x.ch^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.x^2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التفاضل الضمني:

نعلم أن المعادلة $f(x,y)$ بالنسبة لـ y إنه أمكنه كم تفاضل بالنسبة أو باعتبار أنه y تابع للمتحول x تفاضل المعادلة المطلوب بالنسبة لـ x و نحلّ المعادلة الناتجة بالنسبة لـ $\frac{dy}{dx}$.

وعملية التفاضل هذه تسمى تفاضل ضمني.

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية:

1) $xy+x-2y=1$; 2) $y^2(x+y)-(x-y)=0$

الحل:

1) $xy+x-2y=1$.

$$1xy+\frac{dy}{dx}x+1-2\frac{dy}{dx}\cdot 0=0$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=-1-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x-2)=-1-y \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-y}{x-2}$$

2) $2y\cdot\frac{dy}{dx}(x+y)+\left(1+\frac{dy}{dx}\right)y^2-\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$

$$=\frac{dy}{dx}(2xy+2y^2+y^2+1)=-y^2+1.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{1+2xy+3y^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مشتقة توابع معطاة بالشكل الوسيط

في بعض الأحيان تكون العلاقة التابعية التي تربط التابع بالمتحول الصريح أو الضمني بله تعبر على قد حامت ارتباط كل منهما بمتغير ثالث يسمى وسيط فإذا فرضنا أن $x=f(t)$ و $y=g(t)$ توابع قابلة للاشتقاق في مجال ما حيث t وسيط فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية

1) $x = 2t + 5$, $y = 9t^2 + 2$

2) $x = \sin^2 t$, $y = 3\cos\left(\frac{1}{2}t\right)$.

الحل

1) $\frac{dx}{dt} = 2$ $\quad \frac{dy}{dt} = 18t$.

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{18t}{2} = 9t.$$

2) $\frac{dx}{dt} = 2\cos t \cdot \sin t$.

$$= \frac{-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}{\sin 2t}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

قاعدة لوبيتال: تفيد في دراسة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ حيث إذا كانت f و g تابعتين قابلتين للاشتقاق على جوار النقطة x_0 ويحققان الشرطين:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

2) على الأقل احدى النهايتين

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \quad \lim_{x \to x_0} g'(x)$$

غير معدومة

ولتكن مثلاً: $\lim_{x \to x_0} g'(x)$ فإن

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} = +\infty$$

مبرهنة: إذا كانت f و g تابعتين قابلتين للاشتقاق في جوار x_0 يحققان الشرطين:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = \mp\infty$

2) على الأقل احدى النهايتين

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \quad \lim_{x \to x_0} g'(x)$$

موجودة:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960