كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة :السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات
السنة: الأولى
المادة: تحليل رياضي 1
المحاضرة: السابعة

خواص التوابع المستمرة

مبرهنة وايرستراس: إذا كان $f(x)$ متزايد ومستمر على المجال المغلق $[a,b]$ فإنه للتابع حد أعلى أصغري وحد أدنى أعظمي

مثال: $f(x)=x^2$ على المجال $[2,3]$ التابع متزايد ومستمر على هذا المجال $f(2)=4$, $f(3)=9$

$$\sup f(x)=\max f(x)=9.$$
$$\inf f(x)=\min f(x)=4.$$

مبرهنة بولزانو كوشي الأولى:

التابع متزايد ومستمر على المجال المغلق منه $[a,b]$ ويفرض أنه التابع يأخذ قيمتين مختلفتين بالإشارة عند طرفي المجال $(f(a).f(b)<0)$ عندئذٍ يوجد نقطة $x_0\in[a,b]$ بحيث يكون $f(x_0)=0$

المبرهنة الرئيسية: إذا كان المنحني مستمر يمر منه جيد إلى جيد اخر عند بالنسبة للمحور ox فإنه يقطع هذا المحور

مثال: أثبت وجود حلة للمعادلة $f(x)=x-\cos x$ على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$ التابع f متزايد ومستمر على $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$f(0)=-1<0 \quad f(\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{\pi}{2}>0$$

بالتالي اعتماداً على مبرهنة بولزانو كوشي الأولى نجد أنه للمعادلة $f(x)=0$ حلة وحيدة من هذا المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة بولزانو كوشي الثانية:

$f(x)$ تابع معرّف ومستمر على المجال I (مغلق - غير مغلق - محدود - غير محدود) وإذا كان للتابع عند $x=a$ قيمة $f(a)=A$ عند $x=b$ قيمة $f(b)=B$ مختلفات عن بعضهما (غير متساويتين) عندئذٍ من أجل C بحيث $A<C<B$ فإنه يوجد نقطة من المجال I مثل x_0 بحيث $f(x_0)=C$

ملاحظة: sup ليس بالضرورة أنه ينتمي لـ I

inf ينتمي لـ I إجبارياً

الاستمرار المنتظم

تعريف: نقول عن التابع f إنه مستمر بانتظام على المجموعة $X \subset D$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

مثال: اثبت أن $f(x) = 4x - 1$ مستمر بانتظام على R.

الحل: ليكن x_1, x_2 عددين اختياريين من R نجد أن:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |4x_1 - 1 - 4x_2 + 1|$$

$$= |4x_1 - 4x_2| < 4\delta = \varepsilon$$

عندئذٍ إن شرط الاستمرار منتظم

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{4} : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

محققة كما نجد أن δ غير متعلقة بـ x_1, x_2

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إذا كان التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على المجموعة X فإنه تكون مستمر على هذه المجموعة لكن العكس ليس صحيح بالضرورة.

مثال: إثبت التابع $f: R \to R$ المعرف بالعلاقة $f(x)=x^2$ مستمر على R ولكنه غير مستمر بانتظام عليه.

الحل:

البرهان: ذلك يكفي إثبات توجد عدد $\varepsilon_0 > 0$ واحد على الأقل لا يحقق شرط الاستمرار المنتظم.

1- $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < 1$.

إذا اخترنا $x_1 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ ، $x_2 = \frac{1}{\delta}$

فإنه

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

وإنه

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = \left|\frac{1}{\delta^2} + 1 + \frac{\delta^2}{4} - \frac{1}{\delta^2}\right|$$

$$= \left|1 + \frac{\delta^2}{4}\right| > 1.$$

هذه النتيجة تناقض الشرط والتابع مستمر بانتظام على R.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x_1, \varepsilon) > 0$.

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

$|4x_1 - 4x_2| < \varepsilon \Rightarrow 4(x_1 - x_2) < \varepsilon \Rightarrow x_1 - x_2 < \frac{\varepsilon}{4}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

شرط الانتقال من الاستمرار إلى الاستمرار المنتظم وتضمن المبرهنة:

مبرهنة كانتور: إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ فإنها مستمرة بانتظام على هذا المجال.

مثال: بيّنْ أنّ التابع $f(x)=\sin 2x$ مستمر بانتظام على المجال $[0,\pi]$.

الحلّ: $\sin 2x$ معرّفة ومستمرة على المجال $[0,\pi]$ بالتالي حسب مبرهنة كانتور التابع مستمر بانتظام على $[0,\pi]$.

نبرهن:

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin 2x_1-\sin 2x_2|$$
$$=|\sin(2x_1)+\sin(-2x_2)|$$
$$=|\sin(x_1-x_2+x_1+x_2)+\sin(x_1-x_2+x_1+x_2)|$$
$$=|2\sin(x_1-x_2)\cdot\cos(x_1+x_2)|$$
$$=2|\sin(x_1-x_2)|\cdot|\cos(x_1+x_2)|$$
$$\leq 2|\sin(x_1+x_2)|\times 1$$
$$=2|x_1-x_2|$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \Rightarrow 2|x_1-x_2|<\varepsilon \Rightarrow |x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \forall x_1,x_2\in[0,\pi]\ \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ مستمر على $[0,\pi]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

1- تابع الجيب المثلثي:

$$y = \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

1- التابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}$.

2- التابع دوري دوره 2π

3- للتابع نقاط انعدام على $\mathbb{R}$ من أجل $k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4- التابع رجيب التقيير على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ويأخذ قيمه على المجال $[-1, 1]$.

5- التابع متزايد تماماً على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

إذاً يوجد للتابع $y = \sin x$ تابع عكسي نرمز له بالرمز $y = \arcsin x$.

a- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

$\arcsin x : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

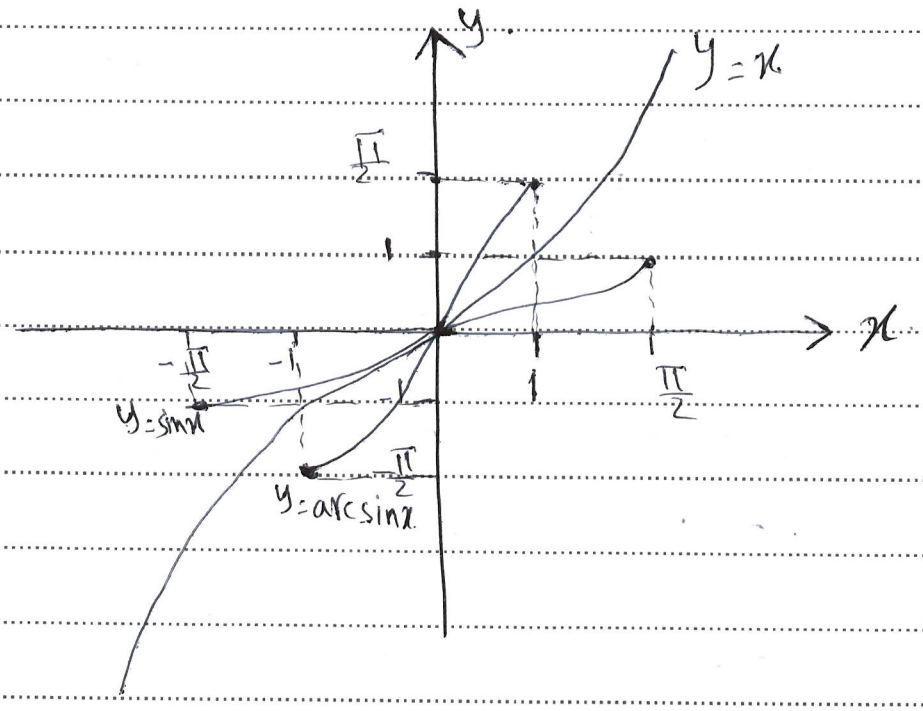
b- التابع العكسي $y = \arcsin x$ معرف ومستمر على مجموعة تعريفه $[-1, 1]$.

c- التابع العكسي $y = \arcsin x$ متزايد تماماً على $[-1, 1]$.

d- التابع العكسي $y = \sin x$ تابع فردي إذاً هو متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

e- نقاط انعدام التابع $y = \arcsin x$ هي $x = 0$ حيث $\arcsin x = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



الدالة العكسية لـ sinx هي دالة متعددة الفروع و sinx وحيد التقيس على أحد المجالات $[\pi(k-\frac{1}{2}), \pi(k+\frac{1}{2})]$ من أجل $k=0$ أي $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ فضلنا على الفرع الرئيسي ونرمز $y = arc\sin x$ بأنه الفرع.

$$Arc\sin x = (-1)^n arc\sin x + \pi k$$

تابع التجيب المثلثي:

$$y = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

1) تابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}$.

2) التابع دوري دوره 2π

3) للتابع نقاط انعدام على $\mathbb{R}$ من أجل $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

4) التابع زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

5) التابع جيب التمييز على المجال $[0,\pi]$ ويأخذ قيمته على المجال $[-1,1]$.

6) التابع متناقص تماماً على المجال $[0,\pi]$.

إذ يوجد له تابع عكسي نرمز له بالرمز $y=\arccos x$.

a) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

b) التابع $y=\arccos x$ معرف ومستمر على $[-1,1]$.

c) ... على مجموعة تعريفه.

d) ... زوجي.

e) نقاط انعدام التابع $y=\arccos x$ من المجال $[-1,1]$

$\arccos x = 0 \Rightarrow x=1$

f) التابع $y=\arccos x$ موجب تماماً على $[-1,1[$

* الفرع الرئيسي $y=\arccos x$ معرف على $[-1,1]$ ويأخذ قيمه من $[0,\pi]$.

* باقي الفروع نصل عليها بالعلاقة $\arccos x = \pm \arccos x + 2\pi k$

3) تابع الظل المثلثي:

1) التابع معرف على $R\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k\}$

2) التابع دوري ودوره π.

3) التابع فردي.

4) التابع جيب التمييز على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ويأخذ قيمه على المجال $]-\infty,+\infty[$

5) للتابع نقطة انعدام على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ من أجل $x=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

6- التابع متزايد تماماً على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ إذ يمكن تعريف تابع عكسي لها نرمز له بالرمز $y=\arctan x$

a- $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

b- التابع العكسي $y=\arctan x$ مستمر على مجموعة تعريفه

c- التابع $y=\arctan x$ فردي

d- التابع $y=\arctan x$ متزايد على مجموعة تعريفه

نقاط انعدام التابع: $\arctan x=0 \Rightarrow x=0$

f- $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

مقاربات افقية $y=\frac{\pi}{2}$ ، $y=-\frac{\pi}{2}$ للتابع العكسي $y=\arctan x$

$\arctan x = \arctan x + \pi k$ باعتبار الفرع X

- التظاء المثلثي:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{i(e^{ix}+e^{-ix})}{e^{ix}-e^{-ix}}$$

1- التابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}\setminus\{\pi k\}$

2- التابع دوري دوره 2π

3- التابع رحيب التغير على المجال $]0,\pi[$ ويأخذ قيمته في المجال $]-\infty,\infty[$

4- التابع فردي

5- نقاط الانعدام على المجال $]0,\pi[$ هي $x=\frac{\pi}{2}$

6- التابع متناقص تماماً على $]0,\pi[$ إذ يحد له تابع عكسي يرمز له بالرمز $y=\operatorname{arccot} x$

a- $y=\operatorname{arccot} x$ مستمر على مجموعة تعريفه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

b) $y = \operatorname{arccotn}$ متناقص على مجموعة تعريفه

c) $y = \operatorname{arccotn}$ تابع فردي

d) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arccotn} x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotn} x = \pi$

$y = \operatorname{arccotn}$ مقاربة افقية للتابع $y = 0$, $y = \pi$

بالفرع السالب: $\operatorname{Arccotn} x = \operatorname{arccotn} x + \pi k$

تمرين: احسب قيمة التابع

1) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, 3) $\operatorname{arcTan}(-1)$

4) $\operatorname{arcCot}(-1)$.

الحل: 1) $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

$y = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

$y = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

3) $y = \operatorname{arcTan}(-1) \Rightarrow \operatorname{Tan} y = -1 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

4) $y = \operatorname{arccot}(-1) \Rightarrow \cot(y) = -1 \Rightarrow y = \frac{3\pi}{4} \in]0, \pi[$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التوابع القطعية:

التابع القطعي	تابع العكس
1) تابع الجيب القطعي $sh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$y = arc\,sh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = arc\,sh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
2) تابع الجيب القطعي $ch x : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$arc\,ch x : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ إذا تم تحديد مجال التعريف على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[0, +\infty[$ $y = arc\,ch x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
3) تابع الظل القطعي: $Th x : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ $Th x = \frac{sh x}{ch x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$arc\,Th x :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ $arc\,Th x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
4) تابع التظلل القطعي $cTh x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to$ $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ $cTh x = \frac{ch x}{sh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$arc\,cTh x =$ $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z