كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة :الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف الجوار لنقطة: نعرّف جوار النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ بأنّه أيّ مجال اختياري مفتوح حصراً

$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

δ دلتا.

مركزه x_0 ونصف قطره δ ويمكن أن نعبر عنه بالشكل $U(x_0, \delta)$ ويمثّل مجموعة الأعداد الحقيقية $x \in \mathbb{R}$ بحيث $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

تتصف الجوارات لنقطة بما يلي:

(1) - أيّ مجموعة تحوي الجوار $U(x_0, \delta)$ هي أيضاً جوار لـ x_0.

(2) - اجتماع وتقاطع جوارين لـ x_0 هو أيضاً جوار لـ x_0.

(3) - من أجل أيّ نقطتين مختلفتين $x \neq y$ فإنّه يوجد جوار U لـ x وجوار V لـ y بحيث

$U \cap V = \phi$

نهاية تابع عند نقطة: نفرض لدينا التابع f المعرّف على المجموعة X ولتكن x نقطة قد تنتمي إلى X أو لا تنتمي

النهاية: نقول أنّ للتابع f نهاية عند x_0 تساوي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق الشرط $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$

$|f(x)-l|<\varepsilon$ ⟹

نكتب عندئذٍ $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ ، $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} l$

تعد هذه الصيغة لمفهوم الوشيء لنظرية تابع عند نقطة.

ملاحظة: إذا كان التابع f معرفاً عند النقطة x_0 فإنه يمكن نظرية التابع x_0 تساوي قيمة التابع عندها

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

مثال: تحقق مما يلي أن التابع $f(x)=\frac{2(x^2-1)}{x-1}$ نظرية مساوية 4 عندما $x\to 1$.

الحل:

$|f(x)-l|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|<\varepsilon.$$

$$|2(x-1)|<\varepsilon.$$

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta.$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\frac{\varepsilon}{2} : |x-1|<\delta$

$|f(x)-4|<\varepsilon$ ⟹ $\lim_{x\to 1} f(x)=4$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتكون للتابع f نظرية l عند النقطة x_0 أن تكون النظرية مساوية لمساواة النظرية من اليمين ومن اليسار.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

مبرهنة: إذا وُجد للتابع $f(x)$ المعرّف على X نهاية وحيدة فقط عند النقطة x_0 يكون للتابع $f(x)$ نهاية وحيدة.

تعريف هينه لنهاية تابع عند نقطة:

نقول أنّ للتابع $f(x)$ نهاية وحيدة ℓ في النقطة x_0، إذا كان من أجل متتالية عددية (x_n) من X والمتقاربة من x_0 $(x_n \to x_0)$ $n \to \infty$ فإنّ المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من ℓ:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell.$$

مثال: ادرس وجود النهاية للتابع $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ في النقطة $x_0 = 0$.

الحلّ: نأخذ المتتالية $x_n = \frac{2}{n\pi}$

$f(x_n) = \sin \frac{n\pi}{2}$.

هذه المتتالية لها ثلاث نهايات $\{-1, 0, 1\}$ ليس للتابع نهاية في هذه النقطة لأنّه $\sin \frac{n\pi}{2}$ لا تأخذ قيمة واحدة دائماً تتراوح بين $\{-1, 1\}$.

تعريف: نقول أنّ للتابع $f(x)$ نهاية ℓ عندما x تسعى إلى $+\infty$ ونكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ تحقّق $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M : \forall x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

نسمّي المستقيم في هذه الحالة مقاربه أفقيه حيث $y = \ell$ بجوار $+\infty$ كذلك وفقه تعريف هينه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقول أن التابع f نهايته اللانهاية

$\forall \{x_n\} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f$

* $\forall \{x_n\}\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f$

تعريف: نقول أن للتابع f نهاية في النقطة x_0 هي العدد الحقيقي M (M) $(-\infty),(+\infty)$ إذا كان من أجله أي عدد حقيقي m يوجد $\delta>0$ بحيث يكون $f(x)>m$ $f(x)<m$ من أجله

$|x-x_0|<\delta$

* $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists \delta>0 ;\ |x-x_0|<\delta \longrightarrow f(x)>m$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

* $\forall m\in\mathbb{R}\ \exists \delta>0$

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<m \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

نسمي هذه الحالة $x=x_0$ مقارب شاقولي

مثال: نعتبر التابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ مقارب أفقي $y=2$ لأن

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

$x=-2$ مقارب شاقولي لأن

$\lim_{x\to -2} = +\infty$.

مبرهنة: إذا كانت f_1, f_2, f_3 توابع معرفة على المجموعة X وكانت $f_1\le f_2\le f_3$ و $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_3(x) = l$ فإن $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = l$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: إذا كانت التابع مركبة $f \circ g$ وكانت

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

$\lim_{y \to \ell} g(y) = K \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (g \circ f) = K$.

التوابع المتكافئة:

$f(x)$, $g(x)$ تابعان معرفان في جوار النقطة x_0 نقول عن f و g أنهما متكافئان بجوار x_0 إذا كانت

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

بجوار x_0.

خواص التوابع المتكافئة:

1) إذا كان $f \sim g$ في جوار x_0 فإن $g \sim f$.

2) إذا كان $f \sim g$ و $g \sim h$ فإن $f \sim h$.

3) إذا كان $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ فإنه في النقطة x_0

$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1}{g_2}$.

4) إذا كان $f \sim g$ معرفة بجوار x_0 فإن $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$.

مثال:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\sin x$ و x متكافئتان بجوار $x_0 = 0$.

تعريف: اللامتناهيات في الصفر: نقول عن التابع f أنه من رتبة اللامتناهي في الصفر بجوار x_0 (x_0 قد ينتمي أو لا ينتمي لـ X) إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

تعريف: اللامتناهيات في الكبر:

نقول عن التابع f أنه من رتبة اللامتناهي في الكبر بجوار x_0 إذا كان $\lim_{x \to x_0} = +\infty$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $f(x)=\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$ لاستمرارية في الصفر بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0.$$

التوابع المستمرة:

تعريف: نفرض لدينا التابع $f(x)$ المعرّف على المجال I ولتكن $x_0\in I$ فإذا كانت للتابع نهاية في النقطة x_0 وساوت إلى قيمة التابع في تلك النقطة ~~فإننا~~ فإننا نقول أنّ $f(x)$ مستمر في النقطة x_0 وتكتب

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ |x-x_0|<\delta$$
$$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

تعريف هيني للاستمرار.

$$\forall\{x_n\};\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x_0)$$

تعريف: نقول عن التابع f أنّه مستمر على المجال I إذا كان مستمر عند كلّ نقطة من نقاط هذا المجال.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}; & x\neq 0\\ 1; & x=0\end{cases}$$

التابع $\frac{\sin x}{x}$ معرّف على $\mathbb{R}/\{0\}$ مستمر عند $\mathbb{R}/\{0\}$ لأنّ ندرس الاستمرار $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow f(x)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\sin x}{x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقاط الانقطاع:

نفرض أن $f(x)$ تابع معرف بجوار x_0

تعريف: إذا كانت نهاية التابع $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجودة أي $\left(\lim_{x\to x_{0^+}} f(x) = \lim_{x\to x_{0^-}} f(x)\right)$

وكانت $\lim_{x\to x_{0^-}} f(x) = \lim_{x\to x_{0^+}} f(x) \neq f(x_0)$

عندئذٍ تدعى x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول قابلة للإزالة إذا كانت $f(x)$ موجودة $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ عدد

مثال: التابع $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ معرف على $R/\{0\}$ فهو مستمر على $R/\{0\}$ فإذا وجد نقطة انقطاع تكون عند x_0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

إذاً x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول قابلة للإزالة فإننا نمدد التابع ك.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

تعريف: إذا كانت

$\lim_{x\to x_{0^-}} f(x) \neq \lim_{x\to x_{0^+}} f(x)$

(موجودة ومحدودة) (موجودة ومحدودة).

عندئذٍ نقول أن x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول غير قابلة للإزالة بقفزة طولها:

$$\left|\lim_{x\to x_{0^+}} f(x) - \lim_{x\to x_{0^-}} f(x)\right|.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ادرس استمرار التابع $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$ على $\mathbb{R}$.

التابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}/\{\frac{3}{2}\}$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{3-2x}{2x-3}=-1$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \frac{2x-3}{2x-3}=1$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x)\neq\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)$$

$x=\frac{3}{2}$ نقطة انقطاع من النوع الأول غير قابلة للإزالة بقفزة طولها 2.

تعريف: إذا كان $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ أو $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ غير محددة أو غير منتهية عندئذٍ نقول أن نقطة انقطاع من النوع الثاني.

مثال:

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ معرف على $\mathbb{R}/\{0\}$ هذا يعني أن التابع وفق تعريف هيني نجد أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة $x=0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z