كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة :الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

اختبار رابب.

- إذا كانت لدينا السلسلة $U_n$ وكانت النهاية

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}-1\right)\right]=R.$$

حيث R قد يكون عدداً حقيقياً أو غير منته.

نميّز الحالات.

1) $R>1$ السلسلة متقاربة.

2) $R<1$ السلسلة متباعدة.

3) $R=1$ حالة شك.

مثال.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\times\frac{1}{2n+1}$$

$n!! = n(n-2)(n-4)(n-6)$

$6!! = 6\times 4\times 2.$

$$\lim_{n\to\infty} U_n\ \frac{U_{n+1}}{U_n}=\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right).$$

$$\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\times 2n+1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=1.$$

تطبيق اختبار رابه:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} n\times\frac{4n^2+10n+6-4n^2-4n-1}{(2n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{6}{4}>1.$$

السلسلة متقاربة.

السلاسل الكيفية والسلاسل المتناوبة:

تعريف: نقول عن السلسلة أنها ذات حدود كيفية (مختلطة) إذا وجد فيها حدود موجبة وأخرى سالبة.

مبرهنة: إذا كانت السلسلة $\sum U_n$ متقاربة بالإطلاق أي $\sum|U_n|$ متقاربة فإن السلسلة $\sum U_n$ متقاربة.

* إن عكس المبرهنة غير صحيح بالضرورة.

تعريف: إذا كانت السلسلة $\sum U_n$ متقاربة وكانت السلسلة $\sum|U_n|$ غير متقاربة نقول أن $\sum U_n$ متقاربة شرطاً.

السلسلة المتناوبة: نقول عن السلسلة العددية $\sum U_n$ أنها متناوبة إذا أمكن كتابتها بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n U_n$$

(( كل حدين متتاليين لهما إشارتين مختلفتين.

مبرهنة ليبنز: تكون السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot U_n$ متقاربة إذا كانت $\lim_{n\to\infty} U_n=0$.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ادرس تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ متتالية متناقصة، $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

⇐ حسب مبرهنة ليبنز السلسلة متقاربة.

بينما السلسلة بالقيمة المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

⇐ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ متقاربة شرطاً

مثال: ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n-2}\right)^n.$$

ندرس سلسلة القيمة المطلقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n-2}\right)^n$$

$$= \sqrt[n]{\frac{3n+1}{4n-2}} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n-2} = \frac{3}{4} < 1$$

السلسلة متقاربة

⇐ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ متقاربة

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n-2}\right)^n$ متقاربة.

التوابع الحقيقية: هي علاقة تربط بين مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ بحيث أن كل عنصر $x$ من $X$ يوجد عنصر واحد فقط $y$ من $Y$ بحيث $y = f(x)$

($X$ منطلق التابع ومجموعة تعريفه)

($Y$ مستقر التابع ومجموعة قيمه)



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$Y_0 = \{y \in Y : y = f(x) , x \in X\}$

التابع الصريح والتابع الضمني

نقول عن التابع أنه صريح إذا كان محلول بالنسبة لأحد متحولاته.

التابع الضمني لا يمكن حله بالنسبة لأي من متحولاته بشكل وحيد.

مثال: $y + 2x - 1 = 0$ ← $y = -2x + 1$ تابع صريح.

2) $5x^2 + 2xy + y^2 = 0$ غير محلول بالنسبة لـ $x$ و $y$ فهو تابع ضمني.

التطبيق: نقول عن التابع أنه تطبيق إذا كانت مجموعة المنقل $X$ مساوية لمجموعة القيم $Y_0$.

التطبيق المتباين: نقول عن التطبيق أنه متباين إذا كانت مجموعة تعريفه حيث نفرض مجموعة قيمه $f(x) = x \; \forall x \in X$

ملاحظة: صورة العنصر نفسه نسمي تطبيق متباين.

التطبيق الثابت: نقول عنه التابع المعرف على $X$ أنه تابع ثابت إذا كانت مجموعة قيمه تتألف من عنصر واحد فقط $c$ يحقق الشرط $f(x) = c \; \forall x \in X$.

التوابع المتساوية: نقول عن التابعين $f$ و $g$ أنهما متساويان إذا وفقط إذا كان

مثال: $f(x) = 3$ أيا كانت قيم $x$ تكون الصورة حيث 3.

أي أن مجموعة التعريف نفسها وكانت من أجل كل $x \in X$

فإنه $f(x) = g(x)$ ونكتب $f = g$.

التابع المتباين: نقول عن التابع $f$ أنه متباين إذا تحقق الشرطين

1) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ الصور متساوية ⟸ الأعداد متساوية

2) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ الصور مختلفة ⟸ الأعداد مختلفة

مثال:

$f(x) = 3x - 2$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$

$x_1 = x_2$

مثال: $f(x) = 3x - 2$ حيث $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابع متباين لأنه

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$

$x_1 = x_2$

مثال: $f(x) = x^2$ حيث $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غير متباين لأنه

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{x_2}$

التابع الغامر: نقول عن التابع $f: X \to Y$ أنه غامر إذا كان كل عنصر $y \in Y$ صورة لعنصر واحد على الأقل من مجموعة المنطلق $X$.

مثال: التابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

المعرف بالعلاقة $y = 2x$ غير غامر لأنه على سبيل المثال من أجل $y = 3$ لا يوجد عنصر $x$ من المنطلق $X$ إذ يكون $2x = 3$.

التقابل: نقول عن التابع $f: X \to Y$ أنه تقابل إذا كان $f$ تابع غامر ومتباين



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ معرفة بالعلاقة
$f(x) = 2x - 3$ بيّن فيما إذا كانت تقابل

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

بالتالي f متباينة.

* نعطي y قيم حتى نستنتج أنّ يوجد قيمة لا تنتمي إلى المستقر صورة لعدد من المنطلق

$1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 2 \in \mathbb{N}$

$2 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

f ليست غامر ليست تقابل.

ملاحظة: لو كانت بالمثال السابق f معرفة بالشكل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
تابع محدد

$f(x) < M$ و $f(x) > m \Rightarrow m < f(x) < M$

التابع العكسي:

إذا كانت التابع المعرفة على X وأخذ قيم في المجموعة Y تقابلاً فإنّه يوجد تابع معرفة على Y ويأخذ قيمه في X ويدعى التابع العكسي ونرمز له بالرمز $f^{-1}$.

* إنّ التابع $f^{-1}: Y \to X$ يدلّ ذلك على أنّه

$\forall x \in X \wedge y \in Y : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

ملاحظة:

$\forall x \in X \Rightarrow f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$

$\forall y \in Y \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = y$.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

✗ سنحنيا التابعين $f^{-1}(y)$ و $y=f(x)$ متناظران بالنسبة للمستقيم $y=x$.

ملاحظة: قد يكون التابع $f$ تقابلاً على المجال $X$ عندئذٍ نقول إنّه تقابلاً مجالياً، وبالتالي التابع العكسي قد يكون تابع متّضح مجالياً.

ملاحظة: إذا كان التابع $f$ تقابلاً متّضح على $I$، يمكن أن نوجد معادلة التابع العكسي $f^{-1}$ بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ $x$ ونكتب $x=f(y)$.

مثال: $f(x)=x^2-1$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ليس تابع تقابلي

$f:[0,\infty[\to[-1,\infty[$ ⟸ $f(x)=x^2-1$

تقابلي فالتابع العكسي للتابع $y=x^2-1$

$x^2=y+1 \Rightarrow x=\sqrt{y+1}$

أو نكتب بالعودة للتسمية المألوفة.

تركيب التوابع: إذا كان لدينا التابعين $f$ و $g$ معرفين بالشكل

$f:X\to Y$

$g:Y\to Z$

إذا كان لدينا $f$ و $g$ التابعين معرفين بالشكل

$f: \underset{\text{متغير}}{X} \to \underset{\text{متغير}}{Y}$

$g: \underset{\text{متغير}}{Y} \to \underset{\text{متغير}}{Z}$

إذا كان $Y_0 \subset Y$ عندئذٍ التابع $h$ المعرف بالشكل

$h: X \to Z$

$h(x)=g(f(x))$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعود لتركيب تابعين f و g ونرمز له بالشكل $h = g \circ f$

مثال: $f(x) = 1 - x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$

$f : [-1,1] \longrightarrow [0,1]$

$g : [0,\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

هل يمكن تركيب $g \circ f$.

$[0,1] \subset [0,\infty[$ عندئذٍ يمكن التركيب.

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(1-x^2) = \sqrt{1-x^2}$

صمد ومقصور التابع.

بفرض لدينا التابع $f(x)$ المعرف على المجموعة $X \subset \mathbb{R}$ ولتكن $A \subset X$ فإذا كان $g(x)$ تابع معرف على $A$ وكانت

$\forall x \in A \longrightarrow f(x) = g(x)$.

نقول أن $g$ ومقصور $f$ على $A$ ونكتب $g = f|_A$ وبالعكس

$f$ هو صمد لـ $g$ على $X$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z