كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة :الثالثة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

القسم: الرياضيات ، السنة: الأولى .
المادة: تحليل رياضي 1 المحاضرة الثالثة نظري

تعريف: نقول عن المتتالية العددية أنها متتالية كوشي (متتالية أساسية) في $\mathbb{R}$ إذا وجد من أجل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ مثل $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}.$$
$$|U_n - U_m| < \varepsilon \ \forall \ m > n_0$$

مبرهنة: كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي.

البرهان:

U_n متتالية متقاربة من العدد ℓ .

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |U_n - \ell| < \varepsilon.$$
$$\forall n > n_0$$

لنفرض أن $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ،
و $n > m > n_0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}.$$

$$|U_n - U_m| \le |U_n - \ell + \ell - U_m| \le |U_n - \ell| + |\ell - U_m| < \varepsilon + \varepsilon$$
$$\le 2\varepsilon = \varepsilon'$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists n_0(\varepsilon') \in \mathbb{N}.$$
$$|U_n - U_m| < \varepsilon' , \ \forall \ n > m > n_0.$$

فالمتتالية متتالية كوشي.

مبرهنة: متتالية كوشي هي متتالية محدودة.

مبرهنة: كل متتالية لكوشي في R هي متتالية متقاربة.

السلاسل العددية:

لتكن لدينا المتتالية العددية

$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$

نفرض المجموع غير المنتهي

$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$

بسلسلة عددية غير منتهية ونرمز لها بالرمز

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

* تعريف متتالية المجاميع الجزئية للسلاسل العددية:

لتكن لدينا السلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \longrightarrow S_1 = U_1 , S_2 = U_1 + U_2 , S_3 = U_1 + U_2 + U_3$$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

* لتحديد مجموع سلسلة عددية نقوم بما يلي

(1) نوجد متتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة (S_n)

(2) دراسة وجود نهاية لمتتالية المجاميع الجزئية (S_n).

ملاحظة:

نقول عن السلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

أنها متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية (S_n) متقاربة أي $\lim S_n = S$

ويكون مجموع السلسلة هو نهاية متتالية المجاميع الجزئية

* أما إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n =$
غير موجودة أو محدودة أو غير وحيدة فإننا نقول أن السلسلة
متباعدة.

مثال: نفرض السلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$$

الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية في السلسلة الهندسية

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a(1-0)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

وهو مجموع المتتالية الجزئية

$q>1 \Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$

المتتالية متباعدة

$q=1 \Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$= a + a + \dots + a = n \cdot a$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \begin{cases} -\infty & \text{سالب } a<0 \\ +\infty & \text{موجب } a>0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ السلسلة متباعدة.

* $q \le -1$ $\lim_{n\to\infty} q^n =$ غير موجودة

$\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجودة

$\Leftarrow$ السلسلة متباعدة.

ملاحظة: السلسلة الهندسية تتقارب فقط عندما يكون أساسها $|q|<1$ وتتباعد في جميع الحالات الأخرى

مثال:

اوجد مجموع السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} = \frac{(a+b)n - a}{n(n-1)}$$

بالمطابقة بين الأمثال

$a+b=0$, $a=-1$

$b=1$

$$= \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}$$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

السلسلة متقاربة ومجموعها يساوي 1

مثال: اوجد مجموع السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\vdots$

$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty$$ السلسلة متباعدة.

باقي السلسلة: إذا كانت لدينا السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_m + U_{m+1} + \cdots + U_{m+n} \cdots$$

إذا حذفنا m حدًا من مجموع السلسلة تعرّف

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} U_n$$

بما يسمى باقي السلسلة.

* إن حذف عدد منتهٍ من حدود السلسلة يعوَّض بباقي السلسلة

مبرهنة: إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ متقاربة فإن باقي ~~السلسلة~~ السلسلة متقاربة.

وبالعكس إذا كانت باقي السلسلة متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ متقاربة.

نتيجة:

إن حذف أو إضافة عدد منتهٍ من الحدود الأولى لسلسلة لا يؤثر في تقارب السلسلة

مبرهنة: الشرط اللازم لتقارب سلسلة عددية أن يسعى حدها العام إلى الصفر

ملاحظة: عند دراسة تقارب سلسلة عددية نتبع الخطوات الآتية

(1) - هل الحد العام للسلسلة U_n يسعى إلى الصفر $(\lim_{n\to\infty} U_n = 0)$.

(2) - * إذا كان $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ عندئذٍ تكون ~~المتتالية~~ السلسلة متقاربة أو متباعدة.

* إذا كان $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ السلسلة متباعدة.

مثال: السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

مثال: ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+0+0} = 2 \neq 0$$

السلسلة متباعدة.

مبرهنة:

إذا كانت السلسلة العددية

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ متقاربة

ومجموعها S فإن السلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} C.U_n$ متقاربة

ومجموعها $C.S$

ملاحظة: سلسلة ريمان (امتحانية):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

* متقاربة عندما $\alpha > 1$
* متباعدة عندما $\alpha \leq 1$.

مثال: السلسلة

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

سلسلة ريمان متقاربة لأن

$\alpha = \frac{4}{3} > 1$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

سلسلة ريمان متباعدة لأن $\frac{1}{5} < 1$

تقارب السلاسل العددية الموجبة:

تعريف: بفرض لدينا السلسلة العددية: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$

ذات الحدود الموجبة عندئذٍ ~~متزايدة~~ نلاحظ أنَّ متتالية المجاميع الجزئية متزايدة وبالتالي تكون السلسلة متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها محدودة.

* بالتالي ينتج من التعريف على المبرهنة التالية

مبرهنة: إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ذات حدود موجبة تكون متقاربة إذا كانت متتالية الجزئية محدودة.

مبرهنة: (اختبار المقارنة).

إذا كانت $\sum U_n$ و $\sum V_n$ سلسلتان موجبتان وكانت $U_n \leq V_n$ من أجل $n \geq n_0$

* إذا كانت $\sum V_n$ متقاربة ⟸ $\sum U_n$ متقاربة.
* إذا كانت $\sum U_n$ متباعدة ⟸ $\sum V_n$ متباعدة.

مثال: ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{3^n}$

$$\frac{\sin^2 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{3^2} + \frac{\sin^2 x}{3^3} + \cdots + \frac{\sin^2 nx}{3^n}$$

نستخدم اختبار المقارنة مع السلسلة الهندسية

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

ومنه الواضح أن $\forall n \geq 1$

$$\frac{1}{3^n} \geq \frac{\sin^2 n x}{3^n}$$

وبما أن السلسلة هندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$\frac{1}{3} < 1$

متقاربة وذلك حسب اختبار المقارنة:

مبرهنة: إذا كانت السلاسل $\sum U_n$ ، $\sum V_n$

موجبات وكانت

* $\infty > \lambda > 0$ فالسلسلتان من طبيعة واحدة اي تتقاربان وتتباعدان معاً

* $\lambda = 0$ تقارب المقام يؤدي لتقارب البسط وتباعد المقام يؤدي لتباعد البسط.

* $\lambda = \infty$ فإن تقارب البسط يؤدي لتقارب المقام وتباعد البسط يؤدي لتباعد المقام

وتدعى هذه المبرهنة باختبار النسبة لتقارب السلسلة

مثال: ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+3n}$$

نقارب السلسلة مع السلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+3n} \cdot \frac{n}{1} = \frac{2n}{1+3n} = \frac{2}{3} < \infty$$

فالسلسلتان من طبيعة واحدة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+3n}$$ متباعدة.

مبرهنة: إذا كانت $\sum U_n$ و $\sum V_n$ سلاسل عددية موجبة وكانت تحقق الشرط

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{V_{n+1}}{V_n}$$

السلسلتان من طبيعة واحدة.

* اختبار الجذر النوني كوشي:

إذا كانت $\sum U_n$ سلسلة موجبة وكانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = K$.

* إذا كانت $K>1$ السلسلة $\sum U_n$ متباعدة.
* إذا كانت $K<1$ ← $\sum U_n$ متقاربة.
* إذا كانت $K=1$ ← حالة شك.

ملاحظة: إذا كانت حدود السلسلة $\sum U_n$ ليست جميعها موجبة عندئذٍ ندرس اختبار كوشي بالشكل $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = K$.

مثال: ادرس تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}$$

الحل باستخدام الجذر النوني.

$$\sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}} = \frac{4}{3} > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

السلسلة متباعدة.

مثال: ادرس تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{n}$$

باستخدام الجذر النوني

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{n}} = \frac{n+5}{3n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{3n-2} = \frac{1}{3} < 1$$

السلسلة متقاربة.

اختبار دالامبير:

إذا كانت $\sum U_n$ سلسلة موجبة وكانت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = K.$$

* إذا كانت $K>1$ فإن السلسلة $\sum U_n$ متباعدة.
* إذا كانت $K<1$ فإن السلسلة $\sum U_n$ متقاربة
* إذا كانت $K=1$ فالحالة شك.

ملاحظة: إذا كانت حدود السلسلة $\sum U_n$ ليست جميعها موجبة عندئذٍ ندرس
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = K$$

مثال: ادرس تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n}}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{n}}{n!} = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \cancel{\frac{6^{n+1}}{(n+1)}} \; \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^{n}} = \frac{6}{n+1} = 0$$

متقاربة ح