كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة : **الثانية/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٤

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تعريف اللامتناهيات في الصفر:

نقول عن المتتالية العددية (U_n) أنها لامتناهية في الصفر إذا كانت $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

يعني أنه جميع حدود المتتالية تقترب من جوار الصفر باستثناء عدد منتهي من الحدود.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad |U_n - \ell| < \varepsilon$$

مثال:

$\left(U_n = \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ لامتناهية في الصفر.

$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

تعريف اللامتناهيات في الكبر:

نقول عن المتتالية العددية U_n أنها لامتناهية في الكبر إذا كانت $\lim_{n\to\infty} U_n = \infty$.

$$U_n > M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \infty$$

لامتناهية في الكبر $(-\infty)$ إذا كانت

$\lim_{n\to-\infty} U_n = -\infty$

خواص المتتاليات المتقاربة:

المتتالية العددية المتقاربة لها نهاية وحيدة.

البرهان: بفرض أن المتتالية (U_n) لها نهايتين مختلفتين ℓ و ℓ'.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \ell'$$

سنبرهن أنه $\ell = \ell'$.

نفرض جدلاً أنه $\ell' > \ell$.

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\ell' - \ell).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:$$

$$|U_n - \ell| < \varepsilon \ ; \ n > n_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:$$

$$|U_n - \ell'| < \varepsilon \ ; \ n > n_0$$

الشرط صحيح من أجله $n > n_0$ حيث $n_0 = \max(n_0', n_0'')$.

وعليه فإن:

$$|\ell' - \ell| = |\ell' - U_n + U_n - \ell| < \varepsilon$$

$$|\ell' - U_n| + |U_n - \ell| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon = \frac{1}{2}(\ell' - \ell)$$

وهذا خطأ إذاً $\ell = \ell'$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة: إذا كانت للمتتالية أكثر من نظير تكون متباعدة.

مثال:

$(U_n = (-1)^n)_{n\geq 1}$ متباعدة لأنها لها نظيران مختلفان.

$$\lim_{n\to\infty} U_n \begin{cases} -1 & ; n \text{ فردي} \\ 1 & ; n \text{ زوجي} \end{cases}$$

مبرهنة: المتتالية المتقاربة محدودة

ليكن لدينا U_n متتالية متقاربة عددية محدودة

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

$$|U_n - \ell| < \varepsilon. \quad ; n_0 > n_0.$$

ولنبرهن أن المتتالية متقاربة أي لنبرهن أن

$$|U_n| < K$$

$$|U_n - \ell + \ell| < \varepsilon.$$

$$|U_n - \ell| + |\ell| < \varepsilon + |\ell| \quad ; n > n_0.$$

$$K = \max\{\varepsilon + |\ell| + |U_1| + |U_2| + \dots + |U_{max}|\}$$

عندئذ تحقق المتراجحة $|U_n| < K$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

بالتالي المتتالية محدودة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

المتتاليات المتزايدة والمحدودة من الأعلى متقاربة من حدّها الأعلى الأصغري

المتتاليات المتناقصة والمحدودة من الأدنى متقاربة من حدّها الأدنى الأعظمي.

مبرهنة (بولزانو ورايرستراس).

البرهان: من المبرهنة السابقة من أجل أية متتالية عددية يمكن إيجاد متتالية جزئية مطردة.

* إذا كانت متزايدة فإنها متقاربة من حدّها الأعلى الأصغري.
* إذا كانت متناقصة فإنها تتقارب من حدّها الأدنى الأعظمي.

وفقاً للمبرهنة السابقة بالتالي تم المطلوب.

مبرهنة: لتكن (U_n)، (V_n)، (W_n) متتاليات عددية فإنه

$$W_n \le U_n \le V_n \quad \forall n > n_0$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell \iff \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} W_n = \ell$$

ملاحظة

حالات عدم التعيين هي

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ \infty\times 0\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 1^{\infty}\ ,\ \infty^0\ ,\ 0^0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad ; \quad a>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{\text{مقدار}\to\infty} \left(1+\frac{1}{\text{مقدار}}\right)^{\text{مقدار}} = e$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: حدد نهاية المتتاليات الآتية:

1) $U_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 2^n}$

$= \sqrt[n]{4^n\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$

$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} * \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$= (4)^{\frac{1}{n}} * \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$= 4 \times 1 = 4.$

2) $U_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$

$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3}\right)}.$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3}}.$

$= (n)^{\frac{1}{n}})^3$

$1 \cdot \sqrt[n]{2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \longrightarrow 1 \times 1 = 1$

$\lim_{n\to\infty} U_n = 1$

3) $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$U_n = \left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{-n}{4}}\right)^{-n}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{-n}{4}}\right)^{3}$$

$$= e^4 \cdot 1 = e^4$$

مبرهنة ستولز: لتكن U_n و V_n متتاليتان عدديتان حيث V_n إذا كانت المتتالية (V_n) متزايدة و $\lim_{n\to\infty} V_n = \infty$ عندئذٍ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{U_n - U_{n-1}}{V_n - V_{n-1}}$$

ملاحظة: يمكنه استخدام مبرهنة ستولز أكثر من مرة

مثال: احسب نهاية المتتالية التي حدها العام

$$U_n = \frac{a^n}{n^2} ; a>1$$

الحل: لدينا $(V_n = n^2)$ متتالية متزايدة

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{a^n - a^{n-1}}{n^2-(n-1)^2}$$

$$\lim \frac{a^n - a^{n-1}}{2n-1} = \lim a^{n-1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{2n-1}$$

نطبق نظرية لوبتال للمرة الثانية

لدينا $2n-1$ متتالية متزايدة

$$\lim_{n\to\infty} 2n-1 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a-1)\ \frac{a^{n-1}-a^{n-2}}{2n-1-2n-3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a-1).\ a^{n-1}\ \frac{(a-1)}{2} = \infty$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة