كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المتتالية العددية: إذا قابلنا كل عدد طبيعي n عدد حقيقي U_n فإنه مجموعة الأعداد الحقيقية التالية:

$U_1, U_2, \dots, U_n$

تسمى متتالية عددية حقيقية واختصاراً متتالية يرمز لها بالرمز $(U_n)_{n\geq 1}$

ملاحظة: أحياناً نفرض المتتالية باستخدام مجموعة جزئية غير منتهية من الأعداد الطبيعية يرمز لها بالرمز $(U_n)_{n\geq 0}$.

* $(U_n)_{n\geq n_0}$ هي مجموعة غير منتهية
* U_n الحد العام للمتتالية.

متتاليات خاصة:

متتالية حسابية: هي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بإضافة عدد ثابت يكون أساس المتتالية ويرمز له بـ r.

$U_{n+1} = U_n + r \quad \forall n \geq 1$

$U_n = U_1 + (n-1)r$

* مجموع عدد متوالية من متتالية حسابية هو:

$S = \frac{(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$

- المتتالية الهندسية: هي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه عن طريق ضربه بعدد ثابت ونسمي أساس المتتالية q.

$$U_{n+1} = U_n \cdot q \; ; \; \forall n \geq 1$$
$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$$

مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية:

$$S = \text{الحد الأول بالمجموع} \cdot \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود } (n)}}{1 - q}$$

* المتتالية المحدودة من الأدنى

نقول عن المتتالية (U_n) أنها محدودة من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي m بحيث يكون

$$U_n \geq m \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$$

* المتتالية المحدودة من الأعلى: نقول عن المتتالية U_n أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M يحقق

$$U_n \leq M$$

* المتتالية المحدودة: نقول عن المتتالية أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأدنى ومن الأعلى أي إذا وجد عددان حقيقيان m, M بحيث يكون $m \leq U_n \leq M$.

بصيغة أخرى: تكون المتتالية محدودة إذا وجد عدد حقيقي K كان $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_n \leq |K|.$$

فإن جميع حدود المتتالية تقع ضمن المجال $[-K, K]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إنه تغيرت حدود المتتاليات نحصل على متتاليات جديدة

2, 4, 6, 8, ..., 2n, 2n+2

4, 2, 8, 6, ..., 2n+2, 2n

ملاحظة: $\sup U_{n+\frac{1}{2}}$ هو الحد الأعلى الأصغري للمتتالية (أصغر الحدود العليا).

inf هو الحد الأدنى الأعظمي وهو أعلى الحدود الدنيا.

✱ inf ، sup ليست بالضرورة من مجموعة القيم

أمثلة:

~~(1) U_n محدودة من الأعلى فقط~~

(1) $(U_n = 5 - n)$ محدودة من الأعلى فقط $\forall n \in \mathbb{N}$ ؛

$U_n \; 5 - n < 5$.

(2) $U_n = (-1)^n$ محدودة.

~~sup و inf~~ محدودة لأنه جميع قيم متتالية

$\sup(U_n) = 1 \quad \inf(U_n) = 0$.

إطراد المتتالية:

✱ نقول أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً إذا حققت الشرط $(U_{n+1} > U_n)$ متزايدة تماماً.

✱ نقول عن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ أنها متناقصة تماماً إذا حققت الشرط $(U_{n+1} < U_n)$ متناقصة تماماً

نقول أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ ثابتة إذا حققت الشرط.

$U_{n+1} = U_n \quad \forall n \geq n_0$.

✱ المتتالية الجزئية: بفرض لدينا المتتالية (U_n) ولتكن المتتالية المتزايدة من الأعداد الطبيعية $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

عندئذٍ ندعو المتتالية (U_{n_k}) متتالية جزئية من (U_n)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $U_n = \frac{1}{2n+1}$ هي متتالية جزئية من المتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{n}$$

ملاحظة: مجموعة قيم المتتالية الجزئية هي مجموعة جزئية من مجموعة قيم المتتالية الأصلية.

ملاحظة: كل متتالية هي متتالية جزئية من نفسها.

مبرهنة: من أجل متتالية يمكن إيجاد متتالية جزئية مطردة.

نظرية متتالية: نقول عن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من العدد الحقيقي ℓ إذا تحقق الشرط:

وهذا تعريف كوشي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) > 0 :$$

$$\ell - \varepsilon \leq U_n \leq \ell + \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq U_n - \ell \leq \varepsilon$$

$$|U_n - \ell| < \varepsilon$$

- أي أنه حدود المتتالية المتقاربة تقع ضمن المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

- نسمي المتتاليات التي لها نهاية محدودة متقاربة.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell$$

ملاحظة: إذا كان $\ell = \pm\infty$ أو لم تكن للمتتالية نهاية نقول بأنه المتتالية متباعدة.

ملاحظة: حدود المتتالية تمثل بنقط على المحور الحقيقي وتكون حدود المتتالية المتقاربة ضمن المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

توضيح: إنه وجود نهاية للمتتالية (U_n) حيث $\ell \in \mathbb{R}$ إذا كانت
لكل العدد الحقيقي الموجب ε يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث تقع جميع
حدود المتتالية داخل المجال $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ ويقع خارج المجال
ربما عدد أقل أو يساوي n_0 من حدود المتتالية.

مثال: برهن أن المتتالية $\frac{3n-5}{2n+3}$ متقاربة من العدد $\frac{3}{2}$.
بحيث تحقق الشرط

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$|U_n - \ell| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{3n-5}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{6n-10-6n-9}{2(2n+3)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-19}{2(2n+3)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{19}{2(2n+3)} < \varepsilon$$

$$\frac{19}{2n+3} < 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{2n+3} < \frac{2\varepsilon}{19}$$

$$2n+3 > \frac{19}{2\varepsilon}$$

$$n > \frac{19}{2(2\varepsilon)} - 3 \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة