كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : الهندسة التحليلية

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

المستقيم في الفضاء

يعطى المستقيم في الفضاء بعدة أشكال

الشكل الأساسي:

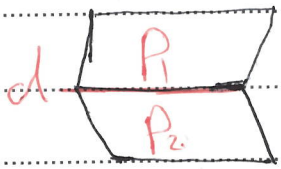
$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ ، $\vec{u}(a,b,c)$

الشكل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

يعطى المستقيم بتقاطع مستويين



$$D:\begin{cases} P_1: a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=0 \\ P_2: a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2+d_2=0 \end{cases}$$

تمرين: أوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم مار من $M_0(4,3,1)$ وموازي الشعاع $\vec{u}(1,-1,2)$ ثم انتقل من الشكل الوسيطي إلى باقي الأشكال.

$$D:\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

الانتقال من الشكل الوسيطي إلى الشكل الأساسي.

نحذف t من كل معادلة:

$$x = 4 + t \Rightarrow t = \frac{x-4}{1}$$

$$y = 3 - t \Rightarrow t = \frac{y-3}{-1}$$

$$z = 1 + 2t$$

$$t = \frac{z-1}{2}$$

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

الانتقال من الشكل الأساسي إلى تقاطع مستويين

$$\underbrace{\frac{x-4}{1}}_{①} = \underbrace{\frac{y-3}{-1}}_{②} = \underbrace{\frac{z-1}{2}}_{③}$$

منها و ②

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-1}$$

$$-x+4 = y-3 \Rightarrow \boxed{P: -x-y+7}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من 3 لدينا

$$\frac{x-4}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$2x-8 = z-1$$

$$P_2: 2x-z-7=0$$

$$D: \begin{cases} -x-y+7=0 \\ 2x-z-7=0 \end{cases}$$

تمرين:

$$\begin{cases} P_1: x-y+2z-5=0 \\ P_2: 3x+5y-4z-1=0 \end{cases}$$

بـ التقيلة الوسيطية والتقيلة الموازية

ط1: نضرب المعادلة 1 بـ 3- ونجمع

(1) $-3x+3y-6z+15=0$

(2) $3x+5y-4z-1=0$

$$8y-10z+14=0$$

$$8y=10z-14$$

$$\boxed{y=\frac{5}{4}z-\frac{7}{4}}$$

نعوضه في 1

$$x-\left(\frac{5}{4}z-\frac{7}{4}\right)+2z-5$$

$$x+\frac{3}{4}z-\frac{13}{4}=0$$

$$\boxed{x=-\frac{3}{4}z+\frac{13}{4}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض $z = t$

$$D: \begin{cases} x = -\frac{3}{4}t + \frac{13}{4} \\ y = \frac{5}{4}t - \frac{7}{4} \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

التمثيل الأساسي:

$$\frac{x - \frac{13}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{y + \frac{7}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{z - 0}{1}$$

ط2 يلزمنا شعاع موازي ونقطة:

$$\overrightarrow{\ell} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= i(-6) - j(-10) + k(8)$$

$$= -6i + 10j + 8k$$

$$\overrightarrow{\ell}(-6, -10, 8)$$

إيجاد النقطة نفرض $z = 0$

$$x - y - 5 = 0$$

$$\therefore 3x + 5y - 1 = 0$$

نضرب الأولى بـ 5 ونجمع

$$8x - 26 = 0 \Rightarrow x = \frac{26}{8} \Rightarrow x = \frac{13}{4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في 1 $y=-\frac{7}{4}$.

$M_0\left(\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}, 0\right)$ و $\vec{\ell}(-6,10,8)$.

ونكتب التمثيل الوسيطي.

تمرين:

$$D:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

أوجد المعادلات الوسيطية

نلزمنا شعاع ونقطة

$$\vec{N_1}\wedge\vec{N_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\vec{\ell}(1,-3,-2)$.

نفرض $z=0$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

بالتعويض بـ 1

$y=-1$.

$M_0(0,-1,0)$

$$D:\begin{cases} x=t \\ y=-3t-1, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المسافة بين نقطة عن مستقيم:

$$L = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

تمرين:

$$D: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

الحل: أولاً نوجد M_0 بفرض $y = 0$

$$1) \; x + z = 0$$

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

من 2 نفوض فيه $z = -1$.

$$M_0(1, 0, -1)$$

$$L = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\vec{u} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

$$\vec{u}(-1, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u} = (1, -3, 2)$$

$$L = \sqrt{\frac{14}{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

معادلة المستقيم المتقاطع لمستقيمين ويوازي مستقيم معلوم:

أولاً نوجد جهة المستوي المشترك D $\longleftarrow$ P_x

$N_x \cdot \vec{u} = 0$

نعيد 1 ونفوض بالجهة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) نوجد مرتبة المستويات الصادرة من D_2 إلى P'_λ ونأخذ

$\vec{N}'_\lambda \cdot \vec{\ell} = 0$

نحسب λ ونعوض بالمرتبة

مثال: أوجد معادلة المستقيم الفاطع لـ D_1 و D_2.

$$D_1 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

ديوانه $\vec{\ell}(1, 5, -3)$

$P'_\lambda = (1+\lambda)x - y + (1-2\lambda)z - 2\lambda = 0$ ...(1

$\vec{N}'_\lambda = (1+\lambda, -1, 1-2\lambda)$

$\vec{\ell}(1, 5, -3)$

$\vec{N}'_\lambda \cdot \vec{\ell} = 1 + \lambda - 5 - 3 + 6\lambda$

$= 7\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$P'_\lambda : 2x - y - z - 2 = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نوجد جملة من P_2:

$P''_\lambda : 2x + (1+\lambda)y + \lambda z + (-1-4\lambda) = 0$

$\vec{N}''(2, 1+\lambda, \lambda)$

$\vec{N}'' \cdot \vec{k} = 2 + 5\lambda - 3\lambda + 5$

$7 - 2\lambda = 0$

$\lambda = -\frac{7}{2}$

$P'': 2x - \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}z + 13 = 0$

$4x - 5y - 7z + 26 = 0$

$D: \begin{cases} P_1: 2x - y - z - 2 = 0 \\ P_2: 4x - 5y - 7z + 26 = 0 \end{cases}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z