كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : الهندسة التحليلية

المحاضرة : **الخامسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

معادلة المستوي الذي يمر من نقطة معلومة ويوازي متجهين معلومين.

إنه معادلة المستوي الذي يمر من النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ويوازي المتجهين $\vec{n_1}(p_1, q_1, r_1)$ $\vec{n_2}(p_2, q_2, r_2)$

حيث يعطى ناظم معادلة المستوي الذي ناظمه

$$\vec{n}(p, q, r) = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$$

ويمر من نقطة معلومة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ونأخذ معادلته بالشكل التالي

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

ونأخذ شكلاً مختصراً وذلك بأن نحسب قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة: إنه معادلة المستوي الماريء النقاط $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

هيه ناتج نشر المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

حيث إن الشرط اللازم والكافي حتى تقع النقط $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ و $M_3(x_3,y_3,z_3)$ و $M_4(x_4,y_4,z_4)$ في مستوي واحد هو أن يكون

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

المعادلات الوسيطية لمستوي:

تعطى المعادلات الوسيطية لمستوي يمر بنقطة معلومة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي المتجهين $\vec{n_1}(p_1,q_1,r_1)$ و $\vec{n_2}(p_2,q_2,r_2)$ بالشكل

$$x = x_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2.$$
$$y = y_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2.$$
$$z = z_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2.$$

مثال: اوجد المعادلات الوسيطية لمستوي يمر بالنقطة $A(2,1,0)$ والمودعة عليه المتجهين والمعادلة العامة.

$$\Pi_1 : x_1 + 2y + z - 4 = 0$$
$$\Pi_2 : 3x + y + 3z + 5 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

المعادلة العامة:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(6-1)+(y-1)(3-3)+z(1-6)=$$

$$\Pi: 5x-5z-10=0$$

$$\Rightarrow \Pi: x-z-2=0$$

وهي المعادلة العامة للمستوي والحصول على المعادلات الوسيطية نعوض في المعادلات الآتية:

$$x = x_0 + \lambda p_1 + \lambda p_2$$
$$y = y_0 + \lambda q_1 + \lambda q_2$$
$$z = z_0 + \lambda r_1 + \lambda r_2$$

$$x = 2 + \lambda_1 + 3\lambda_2$$
$$y = 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2$$
$$z = \lambda_1 + 3\lambda_2$$

المستويات الخاصة: نعلم أن معادلة المستوي بشكل عام هي $px+qy+rz-h=0$ من أجله $h=0$ نحصل على معادلة مستوي يمر من مبدأ الإحداثيات عند غياب أحد المتغيرات الثلاثة نحصل على معادلة مستوي يوازي المحور المقابل للمتغير الغائب فمعادلة مستوي يوازي المحور ox هي $qy+rz+h=0$ ومعادلة مستوي يوازي المحور oy هي $px+rz+h=0$ ومعادلة مستوي يوازي المحور oz هي $px+qy+h=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من اجل $h=0$ و $P=0$ معادلة مستوي يحوي المحور oX من
أجل $h=0$ و $q=0$ معادلة مستوي يحوي المحور oY
$h=0$ و $r=0$ معادلة مستوي يحوي المحور oZ.
عندما يتغير متغيرين من المتغيرات الثلاث نحصل
على معادلة مستوي يوازي المستوي المقابل
للمتغير بين الفائيين امثالاً:
$P=0$ و $q=0$ نحصل على المستوي $rZ+h=0 \Rightarrow Z=-\frac{h}{r}$ معادلة
مستوي يوازي المستوي oXY.
$q=0$ و $r=0$ نحصل على مستوي $Px+h=0 \Rightarrow x=-\frac{h}{p}$ نحصل
على معادلة المستوي oYZ.
$P=0$ و $r=0$ نحصل على مستوي $qy+h=0 \Rightarrow y=-\frac{h}{q}$ نحصل
على معادلة المستوي oXZ.
من اجل $h=0$ و $q=0$ نحصل على معادلة مستوي
oXY.
من اجل $h=0$ و $r=0$ و $q=0$ نحصل على معادلة المستوي
oXZ.
من اجل $h=0$ و $r=0$ و $P=0$ نحصل على معادلة المستوي
oXZ.

بعد نقطة الأصل عن المستوي:

$$P(x,y,z) = Px+qy+rz+h=0$$

تعطى بالعلاقة:

$$d=\frac{|h|}{\sqrt{P^2+q^2+r^2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- الزاوية بين مستويين: إنّ الزاوية بين مستويين

$P_1(x,y,z) = p_1x + q_1y + r_1z + h = 0$

$P_2(x,y,z) = p_2x + q_2y + r_2z + h = 0$

هي الزاوية الكائنة بين ناظمي هذين المستويين.

$\vec{n_1}\ (p_1, q_1, r_1)$

$\vec{n_2}\ (p_2, q_2, r_2)$

$$\cos\alpha = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\ +\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

من هنا نجد أنّ شرط تعامد مستويين هو شرط تعامد ناظميهما أي:

$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$

وشرط توازي مستويين هو أنهما يتوازى ناظميهما أي

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda.$$

أما شرط انطباق مستويين فهو

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

- معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية:

إذا كانت نقاط تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية oX, oY, oZ هي $A(a,0,0), b(0,b,0), c(0,0,c)$

فإنّ معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة تعطى بالشكل

$$\Pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

القوة التحليلية لنقطة: إنّ القوة التحليلية لنقطة $M(x_1, y_1, z_1)$ بالنسبة للمستوي

$$P(x, y, z) = Px + qy + rz + h = 0$$

حيث قيمة المقدار:

$$P(x_1, y_1, z_1) = Px_1 + qy_1 + rz_1 + h$$

بعد نقطة معلومة عن مستوٍ معلوم.

إنّ بعد النقطة $M(x_1, y_1, z_1)$ عن المستوي

$$P(x, y, z) = Px + qy + rz + h = 0$$

تعطى من خلال العلاقة

$$S = \frac{|Px_1 + qy_1 + rz_1 + h|}{\sqrt{P^2 + q^2 + r^2}}$$

$$= \frac{|P(x_1, y_1, z_1)|}{\sqrt{P^2 + q^2 + r^2}}$$

مسألة المستوي المنصف لزاوية مستويين معلومين:

ليكن لدينا مستويين

$$P_1(x, y, z) = P_1x + q_1y + r_1z + h = 0$$

$$P_2(x, y, z) = P_2x + q_2y + r_2z + h = 0$$

إنّ معادلة المنصف الزاوي لزاوية المستويين تعطى من خلال العلاقة:

$$\frac{P_1(x, y, z)}{|\vec{N_1}|} = \pm \frac{P_2(x, y, z)}{|\vec{N_2}|}$$

حيث $\vec{N_1}\vec{N_2}$ إحدى المقدار

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أما مماثلة المنصف الخارجي تعطى بالعلاقة:

$$\frac{P_1(x_1, y_1, z)}{|\overrightarrow{N_1}|} = \varepsilon \frac{P_2(x_1, y_1, z)}{|\overrightarrow{N_2}|}$$

حزمة المستويات المارة منه مستقيم

نفرض لدينا P_1, P_2 متقاطعان بالفضاء المستقيم D

معادلتي P_1 و P_2 معينان بالمعادلتين

$$P_1(x, y, z) = p_1 x + q_1 y + r_1 z + h = 0$$

$$P_2(x, y, z) = p_2 x + q_2 y + r_2 z + h = 0$$

إن مجموعة المستويات التي تقبل D فصلاً مشتركاً تدعى حزمة المستويات وتكون معادلة أي مستوٍ يمر بالفصل المشترك للمستويين P_2, P_1 هي

$$P(\lambda) = (p_1 + \lambda p_2)x + (q_1 + \lambda q_2)y + (r_1 + \lambda r_2)z + (h + \lambda h_2) = 0$$

شرط تقاطع ثلاث مستويات بخط مستقيم واحد

نفرض ثلاث مستويات P_3, P_2, P_1 معادلاتها

$$P_1(x, y, z) = p_1 x + q_1 y + r_1 z + h = 0$$

$$P_2(x, y, z) = p_2 x + q_2 y + r_2 z + h = 0$$

$$P_3(x, y, z) = p_3 x + q_3 y + r_3 z + h = 0$$

إن شرط تقاطع هذه المستويات هو وجود عدد λ بحيث

$$\frac{p_1 + \lambda p_2}{p_3} = \frac{q_1 + \lambda q_2}{3} = \frac{r_1 + \lambda r_2}{3} = \frac{h_1 + \lambda h_2}{3}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة