كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مبرهنة: تقاطع أسرة منتهية من الفضاءات الخطية الجزئية من فضاء خطي V هو فضاء جزئي من V أيضاً.

البرهان:

نفرض $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ أسرة منتهية من الفضاءات الجزئية من V

لنبرهن أن $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ فضاء جزئي.

بما أن S_i فضاء جزئي $\forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \forall v \in S_i$

$\Rightarrow \forall v \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$

بفرض $\alpha, \beta \in K$ و $u, v \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$

$\forall i = 1, \dots, n$ $u, v \in S_i$

$\alpha u + \beta v \in S_i$

لأن S_i هي فضاءات جزئية.

$\Rightarrow \alpha u + \beta v \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$

$\Rightarrow$ التقاطع هو فضاء جزئي.

الفضاء الصفري لمصفوفة Amxn

ويكون $X \in \mathbb{R}^n$ إذا الجملة الخطية المتجانسة

$AX = 0$

دائماً لها حلول على الأقل.

مجموعة حلول هذه الجملة نسميّ $Null(A)$

إذاً $Null(A)$ هو فضاء خطي من $\mathbb{R}^n$ لأنه

$O_R \in Null(A)$

لأنه $AO_R = 0$

$O_R \in Null(A)$.

نفرض U, V من $Null(A)$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$A(\alpha U + \beta V) = \alpha AU + \beta AV = \alpha(O_{\mathbb{R}^n}) + \beta(O_{\mathbb{R}^n})$.

$\Rightarrow \alpha U + \beta V \in Null(A)$.

وعليه $Null(A)$ فضاء خطي جزئي.

تمرين: عين الفضاء $Null(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$Null(A) = \{ X \in \mathbb{R}^4 ; AX = 0 \}.$$

$AX = 0$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$-x_2 - 2x_3 + x_4$; $x_3 = x_3$

$x_2 = -2x_3 + x_4$; $x_1 = x_3 - x_4$ $\quad x_4 = x_4$

$$Null(A) = \{ X \in \mathbb{R}^4 ; X \{ x_2 x_4 ; -2x_3 + x_3, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$\{ x_3(1, -2, 1, 0), x_4(1, -1, 0, 1) ; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

مولدات الفضاء والتراكيب الخطية

لنذكر الآن أن العناصر $u_1 = (1, -2, 1, 0)$ ، $u_2 = (1, -1, 0, 1)$ هي مولدات الفضاء Null(A) ، كل عنصر من هذا الفضاء هو تركيب خطي لـ u_1, u_2 فما هو التركيب الخطي وما المقصود بالمولدات

التراكيب الخطية

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، $v_1, \dots, v_n$ عناصر من فضاء شعاعي V

نعرف العنصر $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ بأنه تركيب للعناصر $v_1, \dots, v_n$ إذا أمكن إيجاد التراكيب الخطية للمجموعة $v_1, \dots, v_n$ ، كل فضاء شعاعي جزئي من V

مبرهنة: V فضاء شعاعي و $S \subseteq V$

حيث $S \neq \Phi$

$S = \{ v_1, \dots, v_n \}$

إذا $L\{S\}$ أسرة التراكيب الخطية لعناصر S تشكل فضاء شعاعي جزئي

ملاحظة: نرمز للتراكيب $L\{S\}$ أو $SPAN\{S\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان: بما أن $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$\Rightarrow \alpha_i v_i \in L\{S\}$.

$u, v \in L\{S\}$. ليكن

$\alpha, \beta \in K$

نجد

$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$\alpha u + \beta v = \alpha[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n]$

$+ \beta[\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n]$

$= [\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1] v_1 + \dots +$

$[\alpha\alpha_n + \beta\beta_n] v_n \in L\{S\}$

اصبح $L\{S\}$ فضاء جزئي من V يحوي S

برهنا أن فضاء W من V يحوي S سوف يحوي $L\{S\}$

برهنا إذا كانت W يحوي S

$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in W$.

$\Rightarrow \forall x \in L\{S\}$

$\Rightarrow x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in W$.

بما أن W فضاء.

$x \in W \Rightarrow L\{S\} \subseteq W$

بما أن L اصغر فضاء يحوي S

أي عناصر المجموعة S تسمى مولدات الفضاء $L\{S\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: بالمثال السابق:

$$Null(A) = SPAN\{(1,-2,1,0),(-1,0,0,1)\}.$$

مثال:

$$S\{(1,2,4),(2,1,3),(4,-1,1)\}$$

هل تولد S الفضاء P^3.

الحل: إذا $L\{S\} \subseteq P^3$ وشرط كافي الاحتواء المعاكس

$\forall (a,b,c) \in P^3$.

لنبحث عن α, β, γ تحقق.

$$(a,b,c) = \alpha(1,2,4) + \beta(2,1,3) + \gamma(4,-1,1)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = a$$
$$2\alpha + \beta - \gamma = b$$
$$4\alpha + 3\beta + \gamma = c$$

جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & 1 & -1 & b \\ 4 & 3 & 1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -3 & -9 & b-2a \\ 0 & -5 & -15 & c-4a \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 3 & \frac{b-2a}{-3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5b+2a-3c}{-3} \end{array}\right].$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مجموعة مستقيمات و S الناتج R^3 بـ R^3 تولد فضاء جزئي من R^3 هو مجموعة عناصر (X,Y,Z)

$5y+2x-3z=0$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960