كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الفضاءات الشعاعية:

العملية الثنائية: نفرض S مجموعة غير خالية نفرض عملية * (✱) بالشكل:

$* : S \times S \to S$

حيث $(a,b) \to a*b \in S$.

$\forall (a,b) \in S \times S$ نقول * عملية ثنائية داخلية.

الزمرة:

مجموعة غير خالية G نفرض عليها عملية ثنائية داخلية * بحيث:

1- * تجميعية على عناصر G.

2- يوجد عنصر منه G هو الحيادي يحقق

$\forall x \in G ; x*e = x \quad ; \quad e*x = x.$

لكل عنصر منه G ينتمي إلى G نسمي $(G,*)$ زمرة.

الحلقة: S مجموعة خالية تفرض عليها عمليتين داخليتين $(+)$ و $(\cdot)$

$(\cdot)$: تمثل ضرب

بحيث تحقق:

1- $(S,+)$ زمرة ابدالية

2- $(S,\cdot)$ نصف زمرة $\Leftarrow$ $(S,+,\cdot)$ حلقة.

3- $(\cdot)$ توزيعية على الجمع.

ملاحظة: إذا كانت $1 \in S$ فإننا نقول S حلقة واحدية.

إذا كانت العملية الثنائية (الضرب) إبدالية فإننا نقول أن الحلقة إبدالية.

الحقل: هو عبارة عن حلقة واحدية S فيها لكل عنصر من S مقلوب من S بالنسبة لـ (.) باستثناء حيادي الجمع.

أمثلة عن الحلقات:

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$ حلقة إبدالية لكنها ليست حقل

أمثلة عن الحقل:

$(\mathbb{R}, +, .)$ حقل.

- ليكن V مجموعة غير خالية و K حقل إبدالي نعرف على V عمليتين $(+)$, $(.)$ الجمع داخلي والضرب هذا رجيه

$K \cdot V \to V$

مجموعة

شروط الجمع:

1) $x + y = y + x \quad ; \forall x, y \in V$ تبديلية

2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

$\forall x, y, z \in V$

3) يوجد $0_V \in V$ يحقق

$0_V + V = V + 0_V = V \quad \forall V \in V$

4) من أجل كل عنصر x من V يوجد $V \in V$ يحقق

$x + (-x) = -x + x = 0$

وهذا الكلام يعني زمرة تبديلية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

شروط الضرب:

1) $\forall x,y \in V,\ \alpha \in K$

يتحقق $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

2) $\forall \alpha, \beta \in K\ ;\ x \in V$

$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

4) يوجد عنصر $1 \in K$ يحقق $1x = x \quad \forall x \in V$

ج) $(V, +, \cdot)$ فضاء شعاعي والفضاء الشعاعي مبني على الحقل نسمي عناصر الفضاء الشعاعي متجهات بينما نسمي عناصر الحقل سلميات.

أمثلة: $C[a,b]$ أسرة التوابع المستمرة على المجال $[a,b]$ تعرف عليها الجمع

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

والضرب يعرف بالعلاقة:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$.

فضاء شعاعي عناصره وتوابعه مستمرة على $[a,b]$.

مثال هام

P_n أسرة كثيرات الحدود التي درجتها أقل أو تساوي n مع عملتي الجمع والضرب بالعدد الحقيقي هي فضاء شعاعي.

مبرهنة: V فضاء شعاعي، x عنصر من V فإن:

1) $0x = 0_V$

2) إذا كان $x+y = 0_V$ فإن $y = -x$ ((المعكوس الوحيد))

3) $(-1)(x) = -x$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة: ليكن V فضاء خطي

1) $\alpha(0_V) = 0_V$.

2) $\alpha \neq 0$ و $\alpha X = 0_V$ فإن $X = 0_V$

الفضاءات الجزئية:

ليكن V فضاء خطي و $S \subseteq V$ تحقق

1) $S \neq \emptyset$

2) مغلقة للجمع.

3) مغلقة للضرب بعناصر الحقل K فضاء جزئي من V.

تعريف

نقول S فضاء جزئي من V إذا تحقق

1) $0_V \in S$.

2) $\alpha x + \beta y \in S$

$\forall x, y \in S$; $\alpha, \beta \in K$.

ملاحظة: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$

هي فضاءات خطية حيث الحقل هو $\mathbb{R}$.

مثال

$$S = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$$

هل تشكل S فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$.

الحل:

$(0,0)$ صفر الفضاء $\mathbb{R}^2$ لا ينتمي لـ S ← S ليس فضاء جزئي

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z