كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: ليكن A(aij) مصفوفة مربعة نرمز
Mij
مصفوفة ناتجة عن A بحذف سطر وعمود
محدد المصفوفة Mij يسمى المحدد الأصغري لعنصر aij.
تعريف: المتمم الجبري المرافق لعنصر aij يرمز بالعلاقة
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$.

ليكن A مصفوفة المرفقة عبارة عن

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

ملاحظة: يمكننا إيجاد قيمة محدد مصفوفة اعتماداً على أي سطر أو عمود لدينا.

تسمى هذه الطريقة بطريقة لابلاس لإيجاد محدد مصفوفة

مثال: أوجد محدد المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

وفق سطر أول وتم من عمود ثاني بطريقة لابلاس

$$\det = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) - 5(8) + 4(7) =$$

$$-4 - 40 - 28 = -16.$$

وفق العمود الثاني

$$-5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

ملاحظة: تساوي صفرية أو تناسبية صفين أو عمودين في المحدد يجعل قيمة المحدد الذي يوجد فيه صف صفري أو عمود صفري تساوي صفر.

تأثير العمليات الأولية على محدد مصفوفة:

1) مبادلة صفين أو عمودين: بمبادلة صفين أو عمودين لمحدد A مصفوفة ما ينتج مصفوفة B محدد بالعلاقة

$$det(B) = -det(A)$$

2) ضرب صف أو عمود بعدد λ لمصفوفة A ينتج مصفوفة B تحقق

$$det(B) = \lambda det(A)$$

ملاحظة: هذه الخاصة يكون بالشكل:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda & \lambda \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

نضرب λ بالسطر أو العمود الذي نريد تبديل كل العناصر فيه (في هذا المحدد فقط).

3) إذا ضربنا سطر أو عمود ما فيه عدد ثم جمعناه مع هذا السطر أو العمود إلى سطر أو عمود آخر ينتج مصفوفة B تحقق $det(B) = det(A)$ أي لا تتغير قيمة المحدد.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مبادلة السطر الأول مع العمود الثاني

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

رتبة مصفوفة عن طريق المحددات: رتبة أكبر محدد غير صفري

لاحظ بالمثال السابق أن محدد المصفوفة المساوي الصفر

$r(A) = 3$

مثال: جد رتبة A اعتماداً على المحدد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

نحسب المحددات

$$\left(1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}\right) = \left(1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right) = \left(2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$\Longrightarrow r(A) = 2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

قاعدة غاوس لحل جملة معادلات:

n معادلة خطية بـ n مجهول.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$

نوجد محدد الأمثال Δ ثم Δx ، Δy ، Δz حيث Δx ناتج عن Δ باستبدال عمود الثوابت بعمود x ، Δy بعمود y و Δz بعمود z.

نميز الحالات:

1- $\Delta \neq 0$ ← يوجد حل وحيد للجملة $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ ، $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ ، $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

2- $\Delta = 0$ ، $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ الجملة عديدة لانهائية من الحلول.

3- $\Delta = 0$ ، Δx ، Δy ، Δz مغاير للصفر ← تستحيل الحل

تمرين:

$x - z = 4$

$2x + y - z = 4$

$x + 2y + 5 = 8$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$+ (8) - 1(3)$

$1(7) - 1(3) = 7 - 3 = 4 \neq 0$

الجملة لها حل وحيد.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 28 - 1(8 - 8) = 28$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(28) + 4(11) - 1(12).$$

$$= -28.$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 12.$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 7.$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -7.$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = +3.$$

نعوض في المعادلة الثالثة

$$7 - 3 = 4 \rightarrow 4 = 4$$

صحيح.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة