كلية العلوم

القسم : **علم الحياة**

السنة : **الاولى**

المادة : احصاء رياضي

المحاضرة : ٩+١٠/نظري/د.نبيل

توزيعات المعاينة

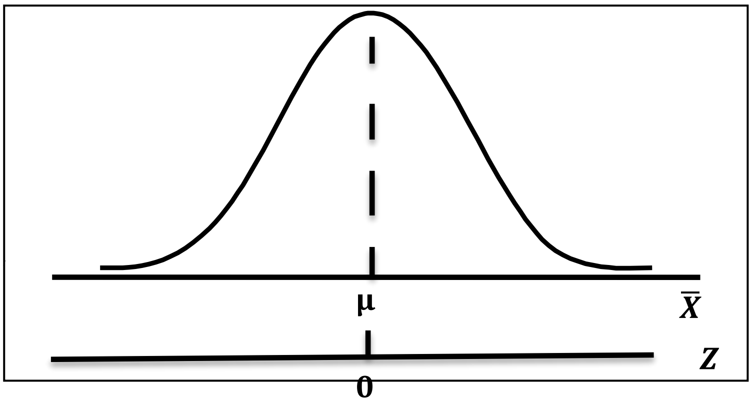
التوزيع الطبيعي المعياري وتوزيع T (ستود نت)

العينة	المجتمعي (الإحصائي)
$\bar{X}$	μ **الوسط الحسابي (ثابت إحصائي)**
s_x	σ_x الانحراف المعياري
-	$\sigma_{\bar{X}}$ انحراف الوسط
-	$\mu_{\bar{X}}$ وسط الأوساط

ان التوزيع الطبيعي المعياري يعطى بالشكل :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_x}$$

ان منحني التوزيع الطبيعي يمثل جرس مقلوب ويسمى بمنحني نحوس



لايجاد P(Z) نتبع الطرق الاتية :

1- Z= - Z
2- من جدول التوزيع Z نكتفي برقمين بعد الفاصلة نأخذ الرقم الاول الصحيح والرقم الاول بعد الفاصلة من العمود والرقم الثاني بعد الفاصلة من السطر ثم نجري التقاطع فنحصل على احتمال Z لتحديد نسبة المساحة

نسبة المساحة P(Z) - **0.5**

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وسطه الحسابي 50 وانحرافه المعياري 5 أوجد التوزيع الطبيعي المعياري لعينة وسطها الحسابي

1- أكثر من 35
2- أقل من 50
3- أكثر من 60

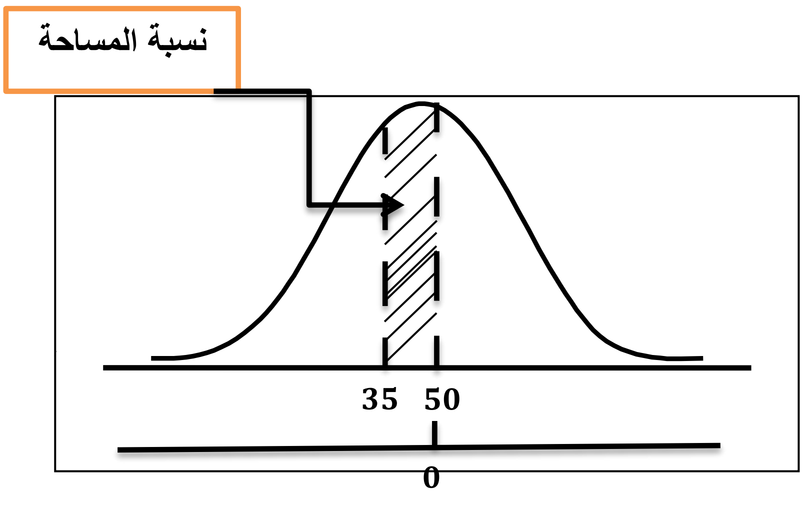
ثم أوجد نسبة المساحة (منحني غاوس)

$$z_1 = \frac{35-50}{5} = -\frac{15}{5} = -3$$

لنوجد P(Z)

$$P(Z) = 0.4987$$

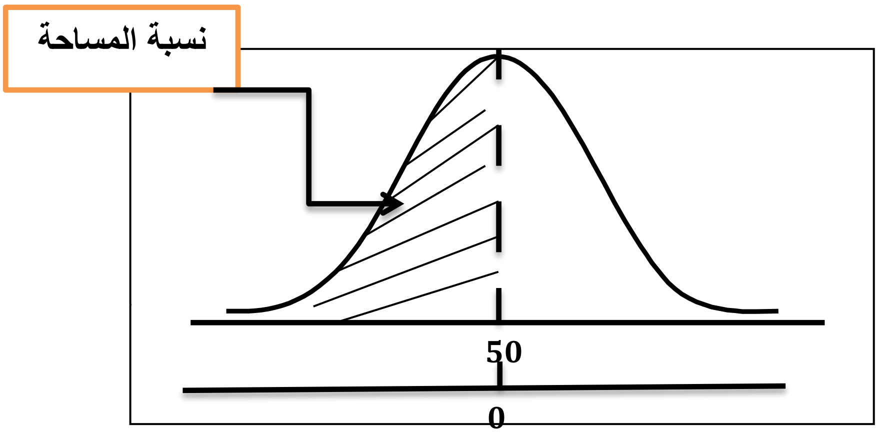
0.5-0.4987=0.0013=(0.13%)



$$z_2 = \frac{50-50}{5} = 0$$

$$P(0) = 0$$

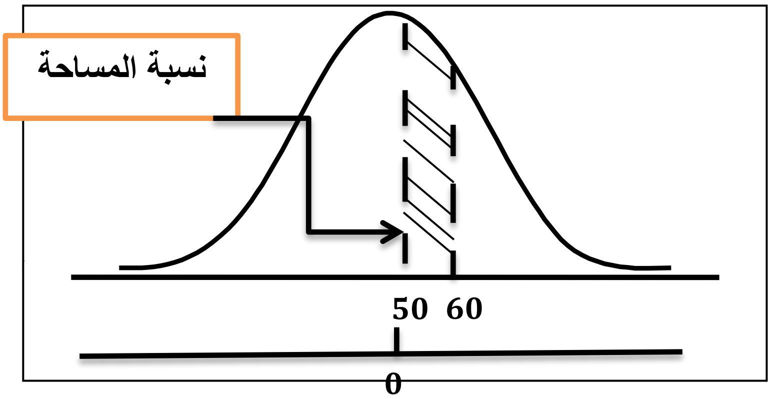
نسبة المساحة $0.5 - 0 = 0.5 = (50\%)$



$$z_3 = \frac{60 - 50}{5} = 2$$

$$P(Z_3) = P(Z) = 0.4772$$

نسبة المساحة $0.5 - 0.4772 = 0.0228 = (2.28\%)$



توزيع استودنت

الاحصائي WS Gosset نشر في عام 1908 تحت اسم مستعار (student)

أعطى التوزيع T صفات $h \leq 30$

1 – توزيع T مضبوط

2 – توزيع T ينحصر في المجال $0 < T < \infty$

3 – له قيمة واحدة ومتماثلة عن الصفر

4 – منحني التوزيع له جرس مقلوب (منحني غوس)

5 – عندما يكبر حجم العينة تقترب من التوزيع z

6 – من استخدامات التوزيع T

تقدير فترة الثقة واختبار الزمنيات μ على المتوسط المجتمعي

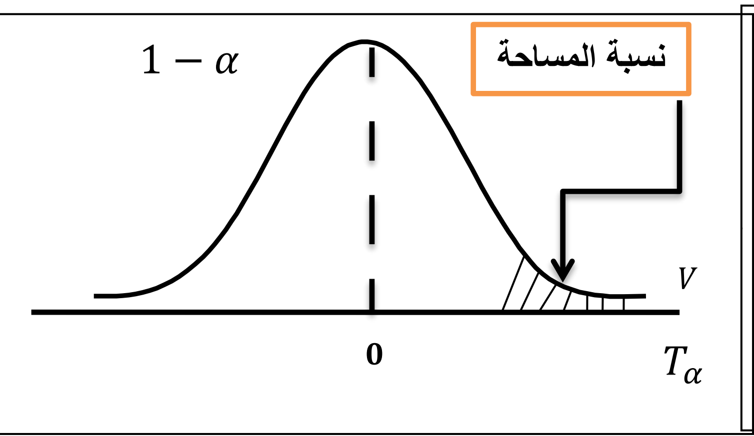
- درجات العينة :

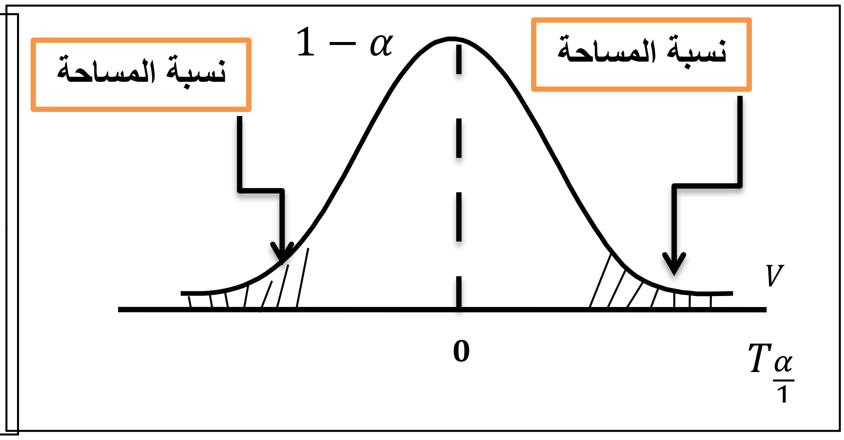
لإيجاد

توزيع T نأخذ الخطأ المعياري α من السطر ودرجات الحرية من العمود نجري التقاطع

لتمثيل نسبة المساحة ل T_α نأخذ الرسم من جهة واحدة

لتمثيل نسبة المساحة ل $\frac{T\alpha}{2}$ نأخذ الرسم من جهتين





لتكن لدينا عينة مؤلفة من 21 عنصر وخطأ معياري قدره 5% أوجد T_{α} و $\frac{T\alpha}{2}$

درجات الحرية   V= 21-1=20

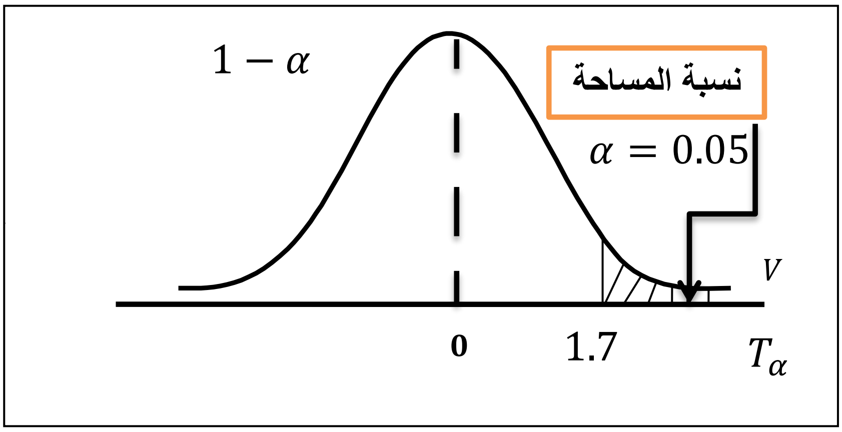
$$\alpha = 5\% \Longrightarrow \alpha = 0.05$$

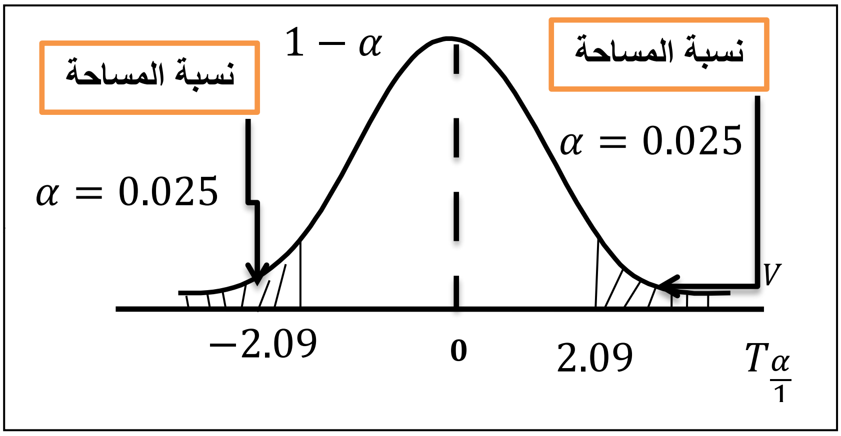
من جدول التوزيع T نجد T_{α}

$$T_{\alpha} = 1.72$$

من جدول التوزيع T نجد $\frac{T\alpha}{2}$

$$\frac{T\alpha}{2} = 2.09$$





لدينا العلاقتين

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$ صحيحتين

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\boxed{\bar{z} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

أما توزيع ستو دنت

$$\boxed{\frac{\mathrm{T}\alpha}{2} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}}}$$

مجال الثقة

$$\boxed{\mu = \bar{X} \pm \frac{\mathrm{T}\alpha}{2} \cdot \frac{S_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}}$$

مثال -1 –

إذا كان توزيع صلاحية إحدى المستحضرات يقترب من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 800 قدره 40 يوم

احسب التوزيع الطبيعي المعياري لعينة مؤلفة من 16 عبوة لوسط حسابي أقل من 775

ثم أوجد منحني التوزيع

الحل :

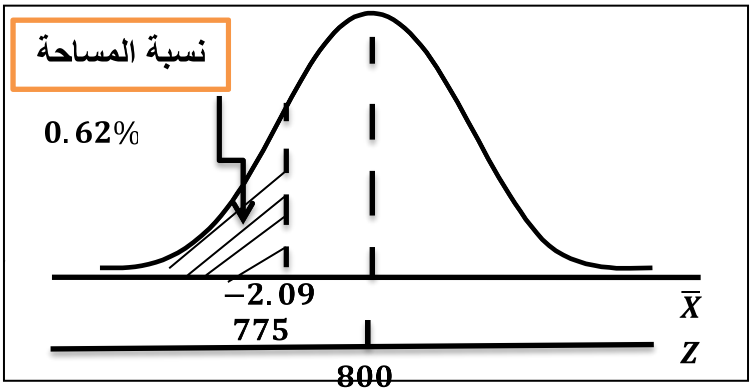
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{775 - 800}{\frac{40}{\sqrt{16}}} = \frac{-25}{10} = -2.5$$

Z=2.5

لنوجد احتمال Z:

$$\mathrm{P(Z)} = 0.4938$$

نسبة المساحة 0.5- 0.4938= 0.0062= (0.62%)



توزيعات المعاينة وفق $\bar{X}$

من أجل عدة عينات من مجتمع لكل عينة وسط حسابي.

إن الوسط الحسابي لكل الأوساط :هو عبارة عن قيم مختلفة باختلاف العينة وهذه القيم المختلفة تشكل ما يسمى بتوزيع المعاينة للوسط $\bar{X}$،($\mu_{\bar{X}}$)وسط الأوساط مجتمعي ،بحيث يكون : $\bar{X} = \frac{\sum_{i=0}^{N} x_i}{n}$ للعينة الواحدة

$$\mu = \frac{\sum_{i=0}^{N} X_i}{n}$$ حالة مجتمعية بدون أوساط

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=0}^{N} \bar{X}_i}{n}$$ للعينات حيث nوسط الأوساط

دائما لدينا العلاقتين صحيحتين:

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad ، \quad \mu = \mu_{\bar{X}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(x_i - \mu)^2}{n}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(x_i - \mu_{\bar{X}})^2}{n}}$$

ملاحظة: عدد العينات الجديدة وفق حجم معين هو عبارة عن عدد العينة القديمة أس الحجم

مثال: بفرض أن $\bar{X}$ تتوزع ضمن إحصائية مجتمعية على النحو التالي : X={0,1,2,3} وكان حجم هذه العينة هو (2)،أثبت صحة العلاقتين السابقتين :

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad ، \quad \mu = \mu_{\bar{X}}$$

ثم أوجد مضلع التكرار

الحل :

$$\mu = \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

وفق الحجم:

$$\sigma^2 = \frac{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{5}{4}$$

عدد العينات الجديد :

$$(n)^2 = (4)^2 = 16$$ عينة

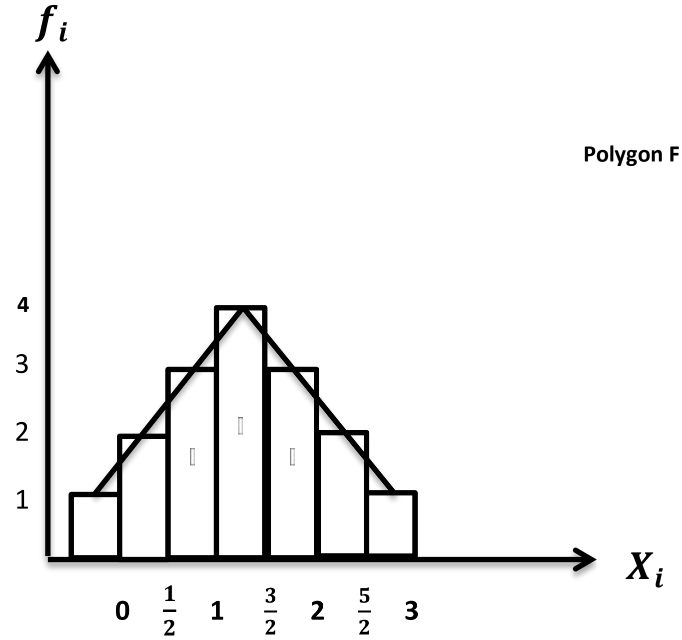
عدد الفئات	العينة		$\bar{X}_i$
	x_1	x_2	
1	0	0	0
2	0	1	$\frac{1}{2}$
3	0	2	1
4	0	3	$\frac{3}{2}$
5	10	0	$\frac{1}{2}$
6	1	1	1
7	1	2	$\frac{3}{2}$
8	1	3	2
9	2	0	1
10	2	1	$\frac{3}{2}$
11	2	2	2
12	2	3	$\frac{5}{2}$
13	3	0	$\frac{3}{2}$
14	3	1	2
15	3	2	$\frac{5}{2}$
16	3	3	3

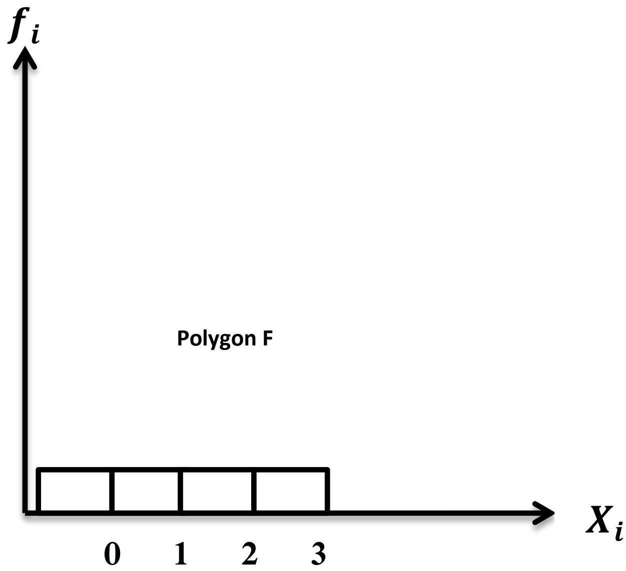
X_i	F_i	X_iF_i	$F_i(\bar{X}-\mu)^2$
0	1	0	$\frac{9}{4}$
$\frac{1}{2}$	2	1	2
1	3	3	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}$	4	6	0
2	3	6	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{2}$	2	5	2
3	1	3	$\frac{9}{4}$
sum	16	24	10

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=0}^{N} X_i F_i}{n} = \frac{24}{16} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma_X{}^2}{N} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8} \quad ، \quad \sigma_X{}^2 = \frac{5}{4}$$





مضلع التكرار للحالة الأولى : يمثل كل مجال مستطيل عرضه ثابت ، كل فئة تمثل قاعدة المستطيل تمثل هذه العلاقة : $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

بالنسبة للحالة الثانية : مداخلة مضلع التكرار :وهو يمثل مستطيلات قواعدها ثابتة الطول ومتساوية بآن واحد وكل واحد منها يساوي

$$(x_{i+1} - x_i)$$

وارتفاعها حد التكرار

منحني التوزيع : يمثل مستطيلات ثابتة الطول ومتساوية ولكن ارتفاعها يساوي التراكم : $(x_{i+1} - x_i)$

مثال : غير محلول: بفرض أن X_i تتوزع وفق توزيع مجتمعي عدد عناصرها هو$X_i = \{1,2\}$ وحجم الفئة 3

أثبت صحة العلاقتين $\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$ ،$\mu = \mu_{\bar{X}}$ ثم أوجد مضلع التكرار بالحالتين

توزيع استودنت ومجال الثقة

درجات الحرية : العينة

من صفات هذا التوزيع:

1 - العينة أصغر أو تساوي تقريبا 35

2 - توزيع T مضبوط و ينحصر ضمن المجال $0< T <\infty$

3 - منحني غوص (للتوزيع) له شكل جرس مقلوب

4 - كلما كبرت حجم العينة اقترب إلى التوزيع الطبيعي Z

5 - يستخدم في تطبيقات مجال الثقة واختبارات μ المجتمعية

6 - درجات الحرية ($V=n-1$)

لإيجاد منحني غوص :

من الخطأ المعياري α ودرجات الحرية نستطيع تعين T_α من خلال الشكل التالي

أما لحساب $\frac{T_\alpha}{2}$ يكون الرسم من الجهتين .

لإيجاد T_α من الجدول : نأخذ العمود الذي يمثل درجات الحرية V والسطر الذي يمثل الخطأ المعياري نجري التقاطع فنحصل على T_α

مثال: عينة مؤلفة من 21 عنصر وخطأ معياري مقداره 5% أوجد مايلي:

1- T_α ، $\frac{T_\alpha}{2}$

2- منحني غوص

الحل : درجات الحرية $V=21-1=20$

$\alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

من الجدول: $T_\alpha = 1.72$ ، $T_{\frac{\alpha}{2}} = 2.09$

بالنسبة لمجال الثقة بما أن العينة وفق $\bar{X}$ عندئذ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(n_i-\mu)^2}{n}}$ ، $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(n_i-\bar{X})^2}{n-1}}$ ، $T_\alpha = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ ، $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(n_i-\bar{X})^2}{n-1}}$ ، * $T_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

مجال الثقة μ من العلاقة

$$\bar{X}\ -\mu = T_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\mu = \bar{X} \pm T_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

وهو مجال الثقة .

$\bar{X}$= وسط العينة

$T_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول توزيع

$\frac{S}{\sqrt{n}}$ الخطأ المعياري للعينة.

مثال: بفرض لدينا *4* طلاب في كلية طب الاسنان اختصاص تقويم لديهم المعدلات التراكمية (1.8،2.2،1.95،3.1)

1-أوجد مجال الثقة باحتمال ثقة 95%

2-أوجد منحني غوص (التوزيع)

الحل:

من القانون $\mu = \bar{X} \mp \frac{T\alpha}{2} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$

نوجد المجاهيل : *V=4-1 =3*

$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.05$

من الجدول $\frac{T\alpha}{2}$ *=3.18*

الوسيط الحسابي للمعدلات التراكمية لأ ربع طلاب

$$\bar{X} = \frac{3.1 + 1.95 + 2.2 + 1.8}{4} = 2.26$$

$$S= \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(n_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{(3.1 - 2.26)^2 + (1.95 - 2.26)^2 + (2.2 - 2.26)^2 + (1.8 - 2.26)^2}{3}}$$

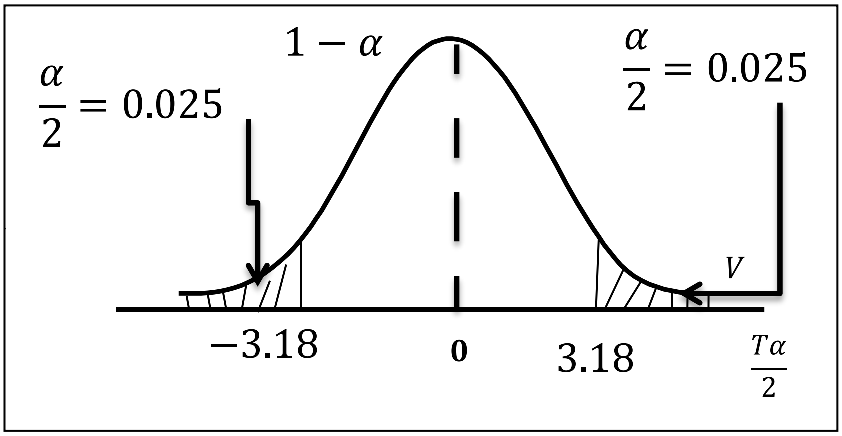
$$= 0.582$$

نعوض في مجال الثقة

$$\mu = 2.26 + 3.18 - \frac{0.58}{2} = 3.185$$

$$\mu = 2.26 - 3.18 \times \frac{0.58}{2} = 1.334$$

مجال الثقة $\mu =]1.334 - 3.185[$



مثال : بفرض أن الدخل الأسبوعي للصيدليات في طرطوس يتبع لتوزيع طبيعي متوسط حسابه 50000 ل.س أسبوعيا و انحراف معياري مقداره 35000 من أجل عينة مؤلفة من 36 صيدلية وكان متوسط دخلهم في الأسبوع أكثر من 65000 المطلوب:

أوجد التوزيع الطبيعي المعياري ومنحني غوص (التوزيع)

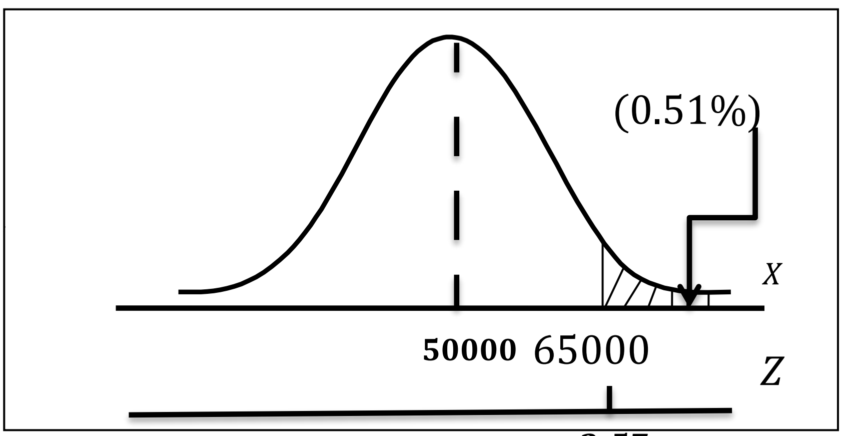
الحل: دخل مجتمعي 50000

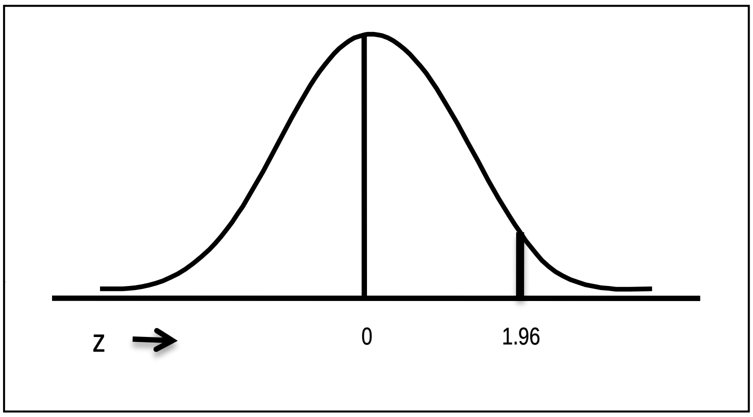
$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z=\frac{65000-50000}{\frac{35000}{\sqrt{36}}} = \frac{15000}{\frac{35000}{6}}=2.57$$

$$P(Z) = P(2.57)=0.4949$$

نسبة المساحة $0.5-0.4949 = 0.0051\ (0.51\%)$





جدول التوزيع الطبيعي - *Z*

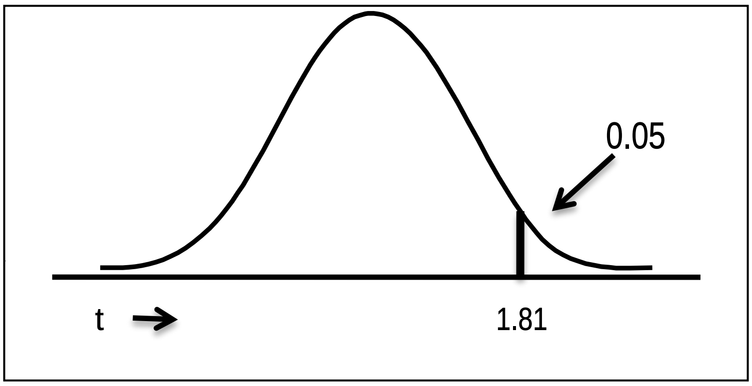
Example

If z=1.96 then

P(0 to z) = 0.4750

Z	*0.00*	*0.01*	*0.02*	*0.03*	*0.04*	*0.05*	*0.06*	*0.07*	*0.08*	*0.09*
0.0	*0.0000*	*0.0040*	*0.0080*	*0.0120*	*0.0160*	*0.0199*	*0.0239*	*0.0279*	*0.0319*	***0.0359***
0.1	*0.0398*	*0.0438*	*0.0478*	*0.0517*	*0.0557*	*0.0596*	*0.0636*	*0.0675*	*0.0714*	***0.0753***
0.2	*0.0793*	*0.0832*	*0.0871*	*0.0910*	*0.0948*	*0.0987*	*0.1026*	*0.1064*	*0.1103*	***0.1141***
0.3	*0.1179*	*0.1217*	*0.1255*	*0.1293*	*0.1331*	*0.1368*	*0.1406*	*0.1443*	*0.1480*	***0.1517***
0.4	*0.1554*	*0.1591*	*0.1628*	*0.1664*	*0.1700*	*0.1736*	*0.1772*	*0.1808*	*0.1844*	***0.1879***
0.5	*0.1915*	*0.1950*	*0.1985*	*0.2019*	*0.2054*	*0.2088*	*0.2123*	*0.2157*	*0.2190*	***0.2224***
0.6	*0.2257*	*0.2291*	*0.2324*	*0.2357*	*0.2369*	*0.2422*	*0.2454*	*0.2486*	*0.2517*	***0.2549***
0.7	*0.2580*	*0.2611*	*0.2642*	*0.2673*	*0.2704*	*0.2734*	*0.2764*	*0.2794*	*0.2823*	***0.2852***
0.8	*0.2881*	*0.2910*	*0.2939*	*0.2967*	*0.2995*	*0.3023*	*0.3051*	*0.3078*	*0.3106*	***0.3133***
0.9	*0.3159*	*0.3186*	*0.3212*	*0.3238*	*0.3264*	*0.3289*	*0.3315*	*0.3340*	*0.3365*	***0.3369***
1.0	*0.3413*	*0.3438*	*0.3461*	*0.3485*	*0.3508*	*0.3531*	*0.3554*	*0.3577*	*0.3599*	***0.3621***
1.1	*0.3643*	*0.3665*	*0.3686*	*0.3708*	*0.3729*	*0.3749*	*0.3770*	*0.3790*	*0.3810*	***0.3830***
1.2	*0.3849*	*0.3669*	*0.3888*	*0.3907*	*0.3925*	*0.3944*	*0.3962*	*0.3980*	*0.3997*	***0.4015***
1.3	*0.4032*	*0.4049*	*0.4066*	*0.4082*	*0.4099*	*0.4115*	*0.4131*	*0.4147*	*0.4152*	***0.4177***
1.4	*0.4192*	*0.4207*	*0.4222*	*0.4236*	*0.4251*	*0.4265*	*0.4279*	*0.4292*	*0.4306*	***0.4319***
1.5	*0.4332*	*0.4345*	*0.4357*	*0.4370*	*0.4382*	*0.4394*	*0.4406*	*0.4418*	*0.4429*	***0.4441***
1.6	*0.4452*	*0.4463*	*0.4474*	*0.4484*	*0.4495*	*0.4505*	*0.4515*	*0.4525*	*0.4535*	***0.4545***
1.7	*0.4554*	*0.4564*	*0.4573*	*0.4582*	*0.4591*	*0.4599*	*0.4608*	*0.4616*	*0.4625*	***0.4633***
1.8	*0.4641*	*0.4649*	*0.4656*	*0.4664*	*0.4671*	*0.4678*	*0.4686*	*0.4693*	*0.4699*	***0.4706***
1.9	*0.4713*	*0.4719*	*0.4726*	*0.4732*	*0.4738*	*0.4744*	*0.4750*	*0.4756*	*0.4761*	***0.4706***
2.0	*0.4772*	*0.4776*	*0.4783*	*0.4788*	*0.4793*	*0.4798*	*0.4803*	*0.4808*	*0.4812*	***0.4817***
2.1	*0.4821*	*0.4826*	*0.4830*	*0.4834*	*0.4838*	*0.4842*	*0.4846*	*0.4850*	*0.4854*	***0.4857***
2.2	*0.4861*	*0.4864*	*0.4868*	*0.4871*	*0.4875*	*0.4878*	*0.4881*	*0.4884*	*0.4887*	***0.4890***
2.3	*0.4893*	*0.4896*	*0.4898*	*0.4901*	*0.4904*	*0.4906*	*0.4909*	*0.4911*	*0.4913*	***0.4916***
2.4	*0.4918*	*0.4920*	*0.4922*	*0.4925*	*0.4927*	*0.4929*	*0.4931*	*0.4932*	*0.4934*	***0.4936***
2.5	*0.4938*	*0.4940*	*0.4941*	*0.4943*	*0.4945*	*0.4946*	*0.4948*	*0.4949*	*0.4951*	***0.4952***
2.6	*0.4953*	*0.4955*	*0.4956*	*0.4957*	*0.4959*	*0.4960*	*0.4961*	*0.4962*	*0.4963*	***0.4964***
2.7	*0.4965*	*0.4966*	*0.4967*	*0.4968*	*0.4969*	*0.4970*	*0.4971*	*0.4972*	*0.4973*	***0.4974***
2.8	*0.4974*	*0.4975*	*0.4976*	*0.4977*	*0.4977*	*0.4978*	*0.4979*	*0.4979*	*0.4980*	***0.4981***
2.9	*0.4981*	*0.4982*	*0.4982*	*0.4983*	*0.4984*	*0.4984*	*0.4985*	*0.4985*	*0.4986*	***0.4986***
3.0	*0.4987*	*0.4987*	*0.4987*	*0.4988*	*0.4988*	*0.4989*	*0.4989*	*0.4989*	*0.4990*	***0.4990***

جدول توزيع - T ستودنت



Example

If tail area is 0.05 and

Degrees of freedom v	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	**63.66**
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	**9.92**
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	**5.84**
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	**4.60**
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	**4.03**
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	**3.71**
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	**3.50**
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	**3.36**
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	**3.25**
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	**3.17**
11	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	**3.11**
12	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	**3.05**
13	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	**3.01**
14	0.69	1.35	1.76	2.14	2.62	**2.98**
15	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	**2.95**
16	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	**2.92**
17	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	**2.90**
18	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	**2.88**
19	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	**2.86**
20	0.69	1.33	1.72	2.09	2.53	**2.85**
21	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	**2.83**
22	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	**2.82**
23	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	**2.81**
24	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	**2.80**
25	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	**2.79**
26	0.68	1.31	1.71	2.06	2.48	**2.78**
27	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	**2.77**
28	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	**2.76**
29	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	**2.76**
30	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	**2.75**
40	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	**2.70**
60	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	**2.66**
=	0.67	1.28	1.64	1.96	2.33	**2.58**