كلية العلوم

القسم : **علم الحياة**

السنة : **الاولى**

المادة : احصاء رياضي

المحاضرة : ٥+٦/نظري/د.نبيل

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

3-1- مقاييس التشتت: Measures Of Dispesion

I-3-1-المدى The Range

إن دراسة التشتت لعينة هو تعبير عن مدى الإختلاف والتباين عن المركز ،لأن دراسة الصيغة تتم عن طريق عينة لذلك لابد من وجود اختلاف عن المركز من هذه المقاييس المدى The Range وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لكنه قليل الاستخدام لأنه لايعبر بشكل دقيق عن طبيعة التباين بين العينات

I-3-2 الوسط الإنحرافي: The Mean Deviation

نرمز له ب M. D و نأخذه بالقيمة المطلقة :

$$M.D=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|}{n}$$

بحالة التكرار:

$$M.D=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i|X_i-\bar{X}|}{\sum_{i=1}^{n}f_i}$$

I-3-3   التباين و الانحراف المعياري :

Variance and standard deviation

التباين نستبدل القيمة المطلقة بالتربيع و بالتالي يكون القانون :

$$s_X^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}$$

اكتب المعادلة هنا.

$$s_X^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}F_i}$$

الانحراف المعياري : Standerd Deviation

$$S_X=\sqrt{S_X^2}$$

$$S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}$$

مع التكرار

$$S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}F_i}}$$

شكل آخر للإنحراف المعياري :

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2\right)}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2 = n\bar{X}$$

(لأنها ليست متعلقة ب *i*)

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-2\bar{X}\bar{X}+\frac{n\bar{X}^2}{n}$$

$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\bar{X}^2$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)^2$$

$$S_X^2 = s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)^2}$$

الشكل الثاني للانحراف المعياري مع التكرار:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}F_iX_i^2}{\sum_{i=1}^{n}F_i}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}F_iX_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}\right)^2}$$

من المثال ضغط الدم لمريض خلال 5 ايام كانت على التوالي: 16,14,12,18,17,13

1- أوجد الانحراف المعياري بطريقتين
2- أوجد الانحراف الوسطي

الحل :

X_i	$(X_i - X)^2$	X_i^2	$\lvert X_i - \bar{X} \rvert$
16	1	256	1
14	1	196	1
12	9	144	3
18	9	324	3
17	4	389	2
13	4	169	2
SUM	28	1378	

القانون الأول

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{90}{6} = 15$$

$$S_X = \sqrt{\frac{28}{6}} = \sqrt{4.66} = 2.158$$

القانون الثاني :

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1378}{6} - \left(\frac{90}{6}\right)^2}$$

$$=\sqrt{229.66 - 225}=2.158$$

$$\text{M.D}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert X_i - \bar{X}\rvert}{n}$$

$$=\frac{12}{6} = 2$$

من مثال انفلونزا Flu H1 N1 أوجد الانحراف المعياري بطريقتين

الحل:

time	F_i	X_i	$(X_i - \bar{X})^2$
$[0,5]$	5	2.45	78.5
$[5,10]$	23	7.45	14.90
$[10,15]$	14	12.45	1.30
$[15,20]$	11	17.45	37.70
$[20,25]$	3	22.45	124.69
$[25,25]$	1	27.45	269.50
SUM	57		

$F_i(X_i - \bar{X})^2$	X_i^2	$F_iX_i^2$
392.5	6.0025	30.6125
342.7	55.5025	1376.5575
18.2	155.0025	2170.035
474.7	304.5025	3344.5275
372.27	504.0025	1512.0075
260.56	235.6025	753.5025
1800.8772		9091.6425

القانون الأول

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}$$

$$=\sqrt{\frac{1800.8872}{57}}$$

$$=\sqrt{\frac{31.59}{5.62}} = 5.62$$

(نعلم سابقا أن $\bar{X} = 11.31$)

$$S_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}$$

$$=\sqrt{\frac{1800.8772}{57}}$$

$$=\sqrt{31.59}=5.62$$

القانون الثاني

$$s_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} F_i}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\right)^2}$$

$$S_X=\sqrt{\frac{9091-6425}{57}-\frac{644.65}{57}}$$

$$=\sqrt{199.5025-127.9081}=5.62$$

4-3-I معامل الاختلاف والدرجة المعيارية

Coefficent Of Variation And Standerd Degree

عامل الإختلاف (C.V) هو إيجاد نسبة بين المتوسط والتشتت (التباين) يعطى بالعلاقة :

$$C.V=\frac{S_X}{\bar{X}}.100$$

إذا كانت C.Vحوالي 35% تكون الصفة المدروسة طبيعية

إذا كانت C.Vأكبر 45% تكون الحالة فضفاضة _مترهلة_ متوسعة.

إذا كانت C.V أقل من 25% تكون الحالة منكمشة _ متقهقرة.

أما الدرجة المعيارية:

$$Z_i=\frac{|X-X_i|}{S_n}$$

X_i هي القيمة المثالية (دون تحيز)

4-5 مقاييس التشتت المجتمعي :

1- المدى المطلق .
2- الانحراف المتوسط .
3- التباين .
4- الانحراف المعياري .

إن استخدام مقاييس النزعة المركزية ، مثلا الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لايعتبر كافيا لوصف مجموعة من البيانات وصفاً كاملاً و إعطاء فكرة دقيقة عن المجموعة وبيان طبيعتها وكيفية توزيع مفرداتها . وحتى نصل إلى استخلاص نتائج أكثر دقة تمكننا من المقارنة بين المجموعات فقد لجأ الإحصائيون إلى استخدام مقاييس أخرى لقياس مدى تجانس البيانات ، أو مدى انتشار البيانات حول مقاييس النزعة المركزية ، ويمكن استخدامها في المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات ومن هذه المقاييس مقاييس التشتت (المدى ، الانحراف الربيعي ، الانحراف المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري) والالتواء .

5-4-1 المدى المطلق Range :

هو أبسط مقاييس التشتت ، ويحسب كما يلي :

- حالة البيانات غير المبوبة : المدى = أكبر قراءة – أقل قراءة .
- حالة البيانات المبوبة : المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة –الحد الأدنى للفئة الأولى.

مثال 5-4-1 :

احسب المدى في الحالات التالية :

أ – للبيانات التالية :

56, 78, 44, 53, 13, 84, 34, 62, 89, 55

ب – للبيانات الموزعة في الجدول التالي :

32-36	28-32	24-28	20-24	16-20	الفئات
15	20	40	15	15	التكرار

الحل :

أ – المدى = (89-13=76) .

ب – المدى = (36-16=20) .

2-4-5 الانحراف المتوسط Mean Deviation (MD) :

الانحراف المتوسط للبيانات غير المبوبة :

الانحراف المتوسط (MD) يحسب من العلاقة التالية :

$$MD=\frac{\sum[x-\bar{X}]}{n} \qquad (1\text{-}4\text{-}5)$$

مثال 5-4-2 :

إذا كانت الطاقة التصديرية لخمس محطات لتحلية المياه بالمليون متر مكعب كما يلي :

7 10 2 5 4 . فأوجد قيمة الانحراف المتوسط للطاقة التصديرية .

الحل : نحسب أولاً الوسط الحسابي : $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{28}{5}=5.6$

وللسهولة نشكل الجدول التالي :

X	الانحرافات $x-\bar{x}$	الانحرافات المطلقة $\|x-\bar{x}\|$
4	4-5.6=-1.6	1.6
5	5-5.6=-0.6	0.6
2	2-5.6=-3.6	3.6
10	10-5.6=4.4	4.4
7	7-5.6=1.4	1.4
Sum	0	11.6

بتطبيق العلاقة (5-4-1) نجد :

$$MD=\frac{\sum |x-\bar{x}|}{n}=\frac{11.6}{5}=2.32$$

- الانحراف **المتوسط للبيانات المبوبة :**

في هذه الحالة يحسب الانحراف المتوسط من العلاقة التالية :

$$MD==\frac{\sum f|x-\bar{x}|}{n} \qquad (2-4-5)$$

مثال 5-4-3 :

يبين الجدول التالي توزيع 40 أسرة حسب الإنفاق الأسبوعي بالألف ليرة .

الإنفاق	2-5	5-8	8-11	11-14	14-17
عدد الأسر	1	8	13	10	8

أوجد الانحراف المتوسط .

الحل :

نكون جدول الحسابات التالي :

جدول الإنفاق	التكرار	مركز الفئةx	xf	الوسط الحسابي	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
2-5	1	15.5	3.5	10.7	7.2	7.2
5-8	8		52		4.2	33.6
8-11	13		123.5		1.2	15.6
11-14	10		125		1.8	18
14-17	8		124		4.8	38.4
Sum	40		428			112.8

فالانحراف المتوسط هو :

$$MD=\frac{\sum f\lvert x-\bar{x}\rvert}{n}=\frac{112.8}{40}=2.82$$

الانحراف المتوسط للإنفاق الأسبوعي هو 2.82 ألف ليرة .

3-4-5 Variance (σ^2) :

هو أحد مقاييس التشتت ، وأكثرها استخداماً في النواحي التطبيقية ، ويعبر عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي . ونميز بين نوعين . التباين في المجتمع (σ^2)والتباين في العينة (S^2) .

1- التبيان في المجتمع (σ^2) : يعطى بالعلاقة التالية :

$$\sigma^2=\frac{\sum(X-\mu)^2}{N} \qquad (3-4-5)$$

حيث $\mu=\sum X/N$ هو الوسط الحسابي لهذا المجتمع .

مثال 4-4-5 :

مصنع لتعبئة المواد الغذائية يعمل به 15 عامل ، وكانت عدد سنوات الخبرة لهؤلاء العمال كما يلي :

5 13 7 14 12 9 6 8 10 13 14 6 11 12 10

بفرض أن هذه البيانات تم جمعها عن كل مفردات المجتمع ، فأوجد التباين لعدد سنوات الخبرة .

الحل :

نحسب أولاً الوسط الحسابي : $\mu = \frac{1}{N}\sum x = \frac{1}{15}(150) = 10$

لنضع للسهولة ، جدول الحسابات التالي :

x سنوات الخبرة	$x-\mu$	$x-\mu^2$
5	5-10=-5	25
13	3	9
7	-3	9
14	4	16
12	2	4
9	-1	1
6	-4	16
8	-2	4
10	0	0
13	3	9
14	4	16
6	-4	16
11	1	1
12	2	4
10	0	0
150	0	130

بتطبيق العلاقة (3-4-5) نجد أن تباين سنوات الخبرة للعمال في المصنع هو :

$$\sigma^2 = \frac{\sum(X-\mu^2)^2}{N} = \frac{130}{15} = 8.67$$

يمكن تبسيط المعادلة (3-4-5)لتصبح على الشكل التالي :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(x^2-\mu^2) \qquad (3-4-5)$$

2- لتباين في المجتمع (S^2) :

في كثير من الحالات يكون تباين المجتمع غير معلوم ، وعندئذ يتم سحب عينة من هذا المجتمع ويحسب التباين من بيانات العينة كتقدير لتباين المجتمع ، فإذا كانت قراءة عينة عشوائية حجمها $X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots, X_n$ فإن تباين العينة يحسب من العلاقة التالية :

$$S^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1} \qquad (4-4-5)$$

حيث $\bar{x} = \sum x/_n$ هو الوسط الحسابي لقراءات العينة .

مثال 5-4-5 :

في المثال (5-4-3) السابق ، إذا تم سحب عينة من عمال المصنع حجمها 5 عمال ، وسجل عدد سنوات الخبرة وكانت كالتالي 9 5 10 13 8 ، احسب تباين سنوات الخبرة لهذه العينة .

الحل :

لنحسب أولاً الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x = \frac{1}{5}(45) = 9$

لنشكل جدول الحسابات التالي :

بتطبيق العلاقة (5-4-4) نجد أن تباين سنوات الخبرة في العينة هو :

$$S^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{34}{4} = 8.5$$

ويمكن تبسيط الحسابات في العلاقة () لتأخذ الشكل التالي :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x^2 - n\bar{x}^2\right) \qquad (4-4-5)$$

سنوات الخبرة X	$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$
8	-1	1
13	4	16
10	1	1
5	-4	16
9	0	0
45	0	34

5-4-4 الانحراف المعياري Standard Deviation :

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين : (للمجتمع σ)و(للعينة S) .

في المثال (5-4-3) نجد أن الانحراف المعياري لسنوات الخبرة لعمال المصنع (المجتمع) هو:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{130}{15}} = \sqrt{8.67} = 2.94$$

في المثال (5-4-4) نجد أن الانحراف المعياري لسنوات الخبرة لعمال العينة هو :

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \sqrt{8.5} = 2.92$$

الانحراف المعياري في حالة البيانات المبوبة :

إذا كانت البيانات الظاهرة ، مبوبة في جدول توزيع تكراري ، فإن الانحراف المعياري يحسب بتطبيق المعادلة التالية :

$$S=\sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{n-1}} \quad \text{أو} \quad S=\sqrt{\frac{\sum x^2 f-\frac{(\sum xf)^2}{n}}{n-1}}$$

حيث f هو تكرار الفئة و X هو مركز الفئة و $\bar{X}=\frac{\sum xf}{n}$.

مثال 6-4-5 :

في بيانات المثال (*6-4-5*) ، احسب الانحراف المعياري للإنفاق الأسبوعي للأسرة ، ثم قارن بين الانحراف المتوسط والانحراف المعياري للإنفاق الأسبوعي للأسرة .

الحل :

لسهولة التعويض في العلاقة (5-4-5) نشكل جدول الحسابات التالي :

بالتعويض في العلاقة (5-4-5) نحصل على :

$$S=\sqrt{\frac{\sum \mathrm{fIx-\bar{x}I}}{n-1}}=\sqrt{\frac{430.2}{39}}=\sqrt{11.031}=3.32$$

جدول الإنفاق	التكرار f	مركز الفئة x	xf	الوسط الحسابي	$(x-\overline{x})^2$	$(x-\overline{x})^2 f$
2-5	1	15.5	3.5	10.7	51.84	51.84
5-8	8		52		17.64	141.12
8-11	13		123.5		144	18.72
11-14	10		125		3.24	34.2
14-17	8		124		23.04	184.32
Sum	40		428			430.2

أي الانحراف المعياري للإنفاق الأسبوعي 3.32 ألف ليرة ووفقاً لهذا القياس فإن تشتت بيانات الإنفاق أكبر من تشتت بيانات الإنفاق وفقاً لمقياس الانحراف المتوسط 2.82 .

خصائص الانحراف المتوسط :

1- الانحراف المعياري للمقدار الثابت يساوي الصفر

2- إذا أضيف مقدار ثابت إلى كل قيمة من قيم المفردات ، فإن الانحراف المعياري للقيم الجديدة (القيم بعد الإضافة) تساوي الانحراف المعياري للقيم الأصلية (القيم بعد الإضافة) .

3- إذا ضرب كل فقيمة من قيم المفردات في مقدار ثابت فإن الانحراف المعياري للقيم الجديدة يساوي الانحراف المعياري للقيم الأصلية مضروباٌ في هذا الثابت .