كلية العلوم

القسم : **علم الحياة**

السنة : **الاولى**

المادة : احصاء حيوي

المحاضرة : الاولى والثانية/نظري/د.نبيل

مبادئ في الاحتمالات الإحصاء

Preliminaries in Probability and statistics

I -1- Algebra of events

لمحة تاريخيّة عَن تَطورّ علم الإحصاء :

- لقد تَمَّ اكتشاف علم الإحصاء في بدايات القرن العشرين ، فهوَ يُعْتَبَر من العلوم الرّياضيّة الحديثة.
- في القرن الرّابعِ قبلَ الميلاد بدأ التفّكير في مجال الاحتمالات وَالمنطق من العالم الإغريقيِّ أرسطو الذّي طوّر في بحثهِ إلى أن تَوصَّلَ بهِ إلى (جبرِ المنطق).
- لقد تَمَيّزَ هذا النَّوع من الجبر بجمل منطقية لها روابط (أدوات ربط) مثالها الاقتضاب –يؤدي إلى – ينتمي – الاحتواء – النّقيضة – التغنّي....) التي بها تكوّنتْ أربع جمل منطقية رياضيّة مؤسسها أرسطو:

1– الجملة المنطقيّة الرياضيّة المباشرة.

2– الجملة المنطقيّة الرياضيّة النقيضة.

3– الجملة المنطقيّة الرياضيّة العكسية.

4– الجملة المنطقيّة الرياضيّة النقيضة العكسية.

- إلا أنَّ هذه الجمل تعتمد على الإفصاح بنوعَيهِ الصّدق أو الكذب أي لا وجود للاحتمال مطلقاً (مِنَ الممكن – مِنَ المحتمل ....).

1. **الجملة المنطقيّة الرياضيّة المباشرة:**

أنا طالب في الجامعة الدّوليّة الخاصّة كلّيّة الصّيدلة ، وَ لديّ مقرر الإحصاء الحيوي

–جملة منطقية مباشرة إفصاحها صادق.

2. **الجملة المنطقيّة الرياضيّة النقيضة:**

لديَّ مقرر الإحصاء الحيوي إذاً أنا طالب في الجامعة الدّوليّة الخاصّة كلّيّة الصّيدلة هنا الجملة شرطها لازم وكافي (كفاية ولزوم الشرط) هذا يعني أنَّه من اللازم كون الجملة صحيحة بكلّ الحالات ،ولكن في الجمل الرياضيّة ليس ذلك بالضرورة من الممكن كوني طالباً ولكن في جامعة أخرى .

هنا نكون قد وقعنا في الشك أي أن الإفصاح لا صادق ولا كاذب من الممكن الاثناء لذلك تكون الجملة منطقية نقيضة إفصاحها كاذب. (لتحديد الإفصاح لا مجال للشك وإن وُجِدَ فهو كاذب).

3. **الجملة المنطقية الرياضيّة العكسية:**

لستُ طالباً في الجامعة الدّوليّة الخاصّة كلية الصيدلة ، وليس لديَّ مقرر الإحصاء الحيوي

هنا من الممكن كوني طالباً ولكن في كلّيّة أخرى.

جملة منطقيّة عكسية إفصاحها كاذب.

4. **الجملة المنطقيّة الرياضيّة النقيضة العكسية:**

ليس لديَّ مقرر الإحصاء الحيوي إذاً أنا لست طالباً في الجامعة الدّوليّة – كلّيّة الصيدلة.

جملة منطقية نقيضة عكسية إفصاحها صادق.

<u>Note:</u> يوجد تلازم في إفصاح كل من الجملتين المنطقيتين الأولى والرابعة أي ما بين المباشرة والنقيضة العكسية. وأيضاً هناك إفصاح متلازم في كل من الجملتين المنطقيتين الثانية والثالثة أي ما بين النقيضة والعكسية.

<u>Info:</u> باعتماد الشبكة المنطقية الممثلة بثنائية(0.1) حيثُ أنَّ:

1 ⟵ إفصاح صادق (✓).

0 ⟵ إفصاح كاذب (X).

اعُتُبِرَ جبر المنطق بدايةً لكلّ العلوم المنطقية الجبرية الرياضيّة الذي من خلاله وُجِدَتْ الخوارزميات التي تدخل في علوم الحواسيب.

تفرّعَ المنطق إلى منطقين أحدهما شكلي يُعنى في منطق الفلسفة والاقتصاد والسياسة (هذا الفرع من المنطق في تطور دائم) ، والآخر رياضيّ الذي كان قد مرَّ في مرحلة كمون (سُبات)، فهو لم يتطور أبداً حتّى القرن 18 (أي ما يُقَارِب 12 قرن من السّبات) إلى أن قام كلّ من العالم الانكليزي جورج بول ومجموعة من زملائه بتأسيس ما يُسَمى(بجبر المجموعات ⟵ Algebra sties) الذي طوّرَ إلى (الجبر البولياني المجرّد) يُعنى ب { sin-cos- ،زوايا، عمليات حسابية كال+/−/÷......} .

جبر المجموعات {يُعنى بـ $\subseteq$, $\cap$, $\cup$ ...} هو عبارة عن جبر مختلف تماماً عن الجبر المجرّد.

<u>المجموعة</u>: تُمَثِّل تَجَمّع لعدة أشياء / عناصر من شكل ولون واحد.

قام العالم بوريل زميل العالم الانكليزي جورج بول بنقل جبر المعلومات إلى : الحوادث، فبدأ بتأسيس تسميات اختلفت مع التي كانت عليها في جبر المجموعات وتتناسب مع جبر الحوادث: (الاختلاف فقط في المسّميات).

- متمّم مجموعة ⟵ حدث مضادّ، وليكن $\bar{A}$
- مجموعة شاملة كليّة ⟵ حدث أكيد، E
- مجموعة خالية ⟵ حدث مستحيل، Ø
- اجتماع مجموعتين ⟵ اجتماع حدثين ،وليكن AUB أو A or B
- تقاطع مجموعتين ⟵ تقاطع حدثين، وليكن A∩B أو A and B (resection)
- فرق مجموعتين ⟵ فرق حدثين ،وليكن$A/\bar{B}$ أو $A\cap\bar{B}$

ما بين القرن 18 و 19 أسّس بوريل ما يسّمى بالتّابع الاحتمالي وهو حقل مستقرّه قيمة واقعة ضمن المجال $[0.1]$

في بدايات القرن 20 وعن طريق الصدفة تطوّرت ألعاب الخط والقمار أسّس علم الإحصاء الذي تفرّع إلى فروع عديدة منها : حيوي ووصفي ورياضي وطبّيّ.

<u>توضيح لبعض المفردات:</u>

- لنفرض أنَّ A وB مجموعتين في فضاء عشوائي Xi (Random space)
  نقول عن(A أو B) أحداث (Events).
- (AUB أو A or B) اجتماع حدثين ⟵ هو جميع العناصر في كلتا المجموعتين.
- (A∩B أو A and B) تقاطع حدثين ⟵ هو جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.
- E/Ω الحدث الأكيد ⟵ هو فضاء العينة ذاته (مجموعة شاملة كليّة).
- ø الحدث المستحيل ⟵ هو المجموعة الخالية ذاتها.
- $\bar{A}$ الحدث المضادّ ⟵ هو المجموعة المتمّمة ذاتها.

$\bar{A}$ تعريفه: هو مجموعة العناصر الموجودة في الحدث الأكيد E وغير موجودة في الحدث A.

خواصّه: اجتماع كل من الحدثين (Ā،A) هو مجموعة شاملة وتقاطعهما هو مجموعة خالية

EX1: E:{1,2}

A:{1}→Ā:{2}

EX2: E:{1,2,3,4,5,6}→ فضاء عينة تجربة رمي حجر بنرد

A:{1,3,5} → Ā:{2,4,6}

ظهور الأعداد الفردية ظهور الأعداد الزوجية

I-2 خصائص جبر الحوادث:Properties of algebra events

تعميم: (إنَّ الخصائص الآتية صحيحة مهما يكن (- أي يكن / من أجل)

A,B,C, E

1) AUB=BUA & A∩B=B∩A

في جبر الحوادث كل من الاجتماع والتقاطع تبديليّ.

2)AU(BUC) = (AUB)UC & A∩(B∩C)=(A∩B)∩C

في جبر الحوادث كل من الاجتماع والتقاطع تجميعي.

3)AU (B∩C)=(AUB)∩(AUC)

في جبر الحوادث الاجتماع هو توزيع على التقاطع .

AU (BUC) =(A∩B)U(A∩C)

في جبر الحوادث التقاطع هو توزيع على الاجتماع.

4)AUA =A A∩A=A

في جبر الحوادث (خاصة اللانمو)

5-AU(B∩A)=A & A∩(<u>BUA</u>) =A

6- AUø=A A∩E=A

في جبر الحوادث دائماً عند التقاء U و∩ (اجتماع و تقاطع) ربط مختلف لمجموعة ذاتها تقوم بامتصاص المختلفة (خاصة الامتصاص)

$$7) A \cup \overline{A} = E \quad \& \quad A \cap \overline{A} = E$$

$$8) \overline{E} = \emptyset \quad \& \quad \overline{\emptyset} = E$$

$$9) \bar{\bar{A}} = A \quad \& \quad \overline{\overline{\overline{\emptyset}}} = \bar{A}$$

في جبر الحوادث مضاد مضاد الحدث (مضاد زوجي) هو الحدث ذاته .

ومضاد مضاد مضاد الحدث (مضاد فردي) هو مضاد الحدث ذاته.

$$10)\ \bar{B} \cup \bar{A} = \overline{A \cap B} \quad \& \bar{B} \cap \bar{A} = \overline{A \cap B}$$

قانونا دومرغان

في جبر الحوادث مضاد اجتماع حدثين يساوي تقاطع المضادات .ومضاد تقاطع حدثين يساوي اجتماع المضادات.

<u>EX</u>: <u>Die</u> E:{1,2,3,4,5,6}

A: {1,3,5}

B:{2,4,6}

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ & $\overline{A \cap B}$

$L_1 = \overline{A \cup B} = \bar{E} = \varnothing$ $= \bar{A} \cup \bar{B}$

$L_2 = \bar{A} \cap \bar{B} = B \cap A = \varnothing$

$L_1 = L_2$

$L_1 = L_2$ $L_1 = \overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} =$

$L_2 = \bar{A} \cup \bar{B} = B \cup A = E$

(<u>Q</u> : $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$)

10- $A \subset B$ 1- $A \cap B = A$

2- $A \cup B = B$

احتواء مجموعة لأخرى يعني أن كل عنصر من المجموعة الأصغر المحتوى في الأكبر موجود في المجموعة الأكبر الحاوية للأصغر.

Note: $A \subset A$ حسب التعريف صحيحة (كل مجموعة هي مجموعة جزئية في نفسها .

التركيز على هذه الخاصية في بحث حقل بوريل.

نتائج:

1 - نتيجة أولى: في جبر الحوادث هو نفسه جبر المجموعات (جبر بول) الاختلاف فقط في التسميات.

2 - نتيجة ثانية: العنصر الحيادي بالنسبة للتقاطع هو الحدث الأكيد والعنصر الحيادي بالنسبة للاجتماع هو الحدث المستحيل.

بغض النظر : (+/-/×/÷/......) ($e * a=a=a * e$) **هنا العنصر الحيادي e لا يؤثر على a**

تعريف العنصر الحيادي e: عند تشكيله مع أي عنصر آخر يعطي ذاته ولا يؤثر على العملية سواء أكان من اليسار أو اليمين.

InFo: العنصر الحيادي لعملية الزائد الصفر

العنصر الحيادي لعملية الضرب الواحد

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cup \emptyset = A \\ A \cap \underset{e}{E} = A \end{array} \right.$$

لنفرض لدينا فضاء عينة $E(e_1,e_2,e_3,\ldots..en)$

حيث n تمثل عدد عناصر فضاء العينة

لنأخذ تجزئة لهذا الفضاء $\longrightarrow$ $B(E) :\{A; A \subset E\}$

إن (B(E تمثل مجموعة كل الحوادث A حيث A مجموعة جزئية من فضاء العينة E ، وهذه التجزئة لها شروط:

نقول عن هذه التجزئة أنها تمثل حقل بوريل إذا حققت الشروط الآتية:

$\emptyset \subset B(E)$ & $E \subset B(E)$

- كيف يمكن لتجزئة أن تحوي فضاء عينة ؟
- من الممكن كون أحد المجموعة الجزئية من التجزئة B(E)

EX: Die E:(1,2,3,4,5,6)

B(E): [{1},{1,2},……….{1,2,3,4,5,6}]

Note: عدد المجموعات الجزئية المحتمل وجودها في B(E)هو 36

نلاحظ أن آخر تجزئة هي ذاتها فضاء العينة ، فنقول (فضاء جزئي في تجزئة)، نستنتج أن التجزئة أكبر من الفضاء ذاته من حيث الحجم.

خلاصة: كل مجموعة هي جزئية في ذاتها ، فطالما فضاء العينة E هو مجموعة ظهور أعداد النرد من 1 $\longrightarrow$ 6 هذا يعني الفضاء جزئي في ذاته .

2) $\forall A_i \subset B(E)$, $\cup A_i \subset B(E)$ &

$\cap Ai \subset B(E)$

أيّاً تكن عدة حوادث من التجزئة B(E) يؤدي أن اجتماع هذه الحوادث هو B(E) وتقاطعهما من B(E)أيضاً.

InFo: عملية الجمع هي عملية داخلية مغلقة بالنسبة إلى الأعداد الطبيعية أما الطرح فلا ، فالطرح

3)$\forall Ai \subset B(E)$ $\quad\quad$ $\bar{A}i \subset B(E)$

أيا يكن Ai من التجزئة B(E) هذا يعني أن $\bar{A}i$ هو من B(E) أيضاً.

نقول عندما هذه الشروط محققة يعني أن هذه التجزئة تمثل حقل بوريل.

لنأخذ تطبيق ما (L) مُعرّف عل النحو التالي:

$$L: B(E) \longrightarrow [0,1]$$

منطلقه تجزئة حقل بوريل

مستقره مجموعة القيم ضمن هذا المجال

يمكن كتابة هذا التطبيق على شكل احتمال P (Probability):

$$P(A): B(E) \quad [0,1]$$

ويُقْرَأ : احتمال أي تجزئة أو حادثة مستقرّها قيم المجال [0,1].

نقول عن هذا التطبيق أنه تابع احتمالي إذا حقق الشروط الآتية :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

أي تابع احتمالي قيم مستقره هو مجموعة الأعداد الواقعة ضمن المجال [0,1].

قانون الجمع الاحتمالي بصورته المختصرة $\longrightarrow$ $P(U\, Ai) = \Sigma\, P(Ai)$

هو احتمال اجتماع عدة حوادث يساوي مجموع هذه الاحتمالات.

$P(A_1 U\, A_2 U\, A_3 U .... U\, A_n) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+....+....+P(A_n)$ قانون الجمع الاحتمالي بصورته العامة.

$P(E) = 1$ $\quad\quad$ $\&\; P(\emptyset)=0$

احتمال أي فضاء عينة=1

احتمال مجموعة خالية =0

هام Q: حدد ماهي شروط كل من التابع الاحتمالي وحقل بوريل؟

Conclusion for A or B

The two events A and B in a random space E, we notice this next points:

1)$0 \leq P(A) \leq 1$

لا يمكن أن يكون للتابع الاحتمالي أي قيم سالبة لأن مستقره مجموعة القيم ضمن المجال

2)$A \subset B \quad P(A) \leq P(B)$

دائماً الاحتمال لا يُعامل معاملة المجموعات والحوادث ، فلا نكتب [$P(A) \subset P(B)$]

لأن الاحتواء من خواص جبر المجموعات أما الاحتمال فإما أكبر أو أصغر أو يساوي.

3) $A \cap B = \emptyset \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

متى نقول عن عدة حوادث لها خاصية أنها مستقلة أي ليس لها ارتباط بحوادث أخرى؟

نقول عن حدثين أنهما مستقلين عندما تقاطعهما هو الحدث المستحيل بمعنى أن A غير مشروط مع B وبالعكس.

4) $A \cap B \neq \emptyset \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P\ (B)}$

قانون الاحتمال الشرطي : نقول احتمال A علماً أن B قد وقع هو احتمال التقاطع على احتمال الحدثB.

من الخاصة 5 نجد الخواص الآتية:

a) $A \subseteq B \qquad P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$

b) $B \subseteq A \qquad P_B(A) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

C) $P(A \cap B) = P_B(A).P(A)$

$P_{B,C}(A) \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$

$P(A \cap B \cap C) = P_{B,C}(A).P(B \cap C)$

التقاطع تبديلي

من العلاقة C نجد: $P(A\cap B\cap C)= P_c(B).P(C).P_{B,c}(A)$

المفترض أن وقوع هذه الحوادث وليكن A غير مشروطاً بوقوع الحوادث أخرى

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$$

ويسمى بقانون الضرب الاحتمالي الذي يمكن كتابته بصورة مختصرة على الشكل

$$P(\cap Ai)=\pi\ P(Ai)$$

هو احتمال تقاطع عدة حوادث يساوي جداء هذه الاحتمالات وأيضاً يمكن كتابته بصورة عامة على الشكل:

$$P(A\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\ldots\cap A_n)=P(A_1).P(A_2).P(A_3)\ldots..P(A_n)$$

6) $P(A\cup\bar{A}) =P(E) =1$

$P(A\cup\bar{A}) =P(A) + P(\bar{A}) =1 \longrightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$

Or $P(\bar{A}) =1-P(A)$

إذا رمزنا لنجاح التجربة /الحادثة بP ولفشلها ب qعندئذٍ:

$P=1-q$ Or $q=1-P$

7) $P(A\backslash B)= P(A\cap B)= P(A) - P(A\cap B)$

ويسمى بقانون الفرق التناظري.

InFo 1: ماهي أصغر مجموعة من المجموعات العددية؟

1– مجموعة الأعداد الطبيعية –IN– هي المجموعة الأصغر [1,2,3,.....+∞] وتُعّرف بأنها كل عدد يزيد عن الذي يليه ب 1- وهي مجموعة الأعداد الموضوع ضمنها الصفر ، فهو يحقق العلاقة السابقة – 1=0+1-

2– تليها مجموعة الأعداد الصحيحة –Z– وهي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالصفر $[-\infty,0]\cup[0,+\infty]$.

3– تليها مجموعة الأعداد العادية –Q– التي تقسم على قسمين :

مجموعة الأعداد العادية ومجموعة الاعداد غير العادية

مجموعة الأعداد العادية–Q– وهي مجموعة الأعداد العشرية (قسمة عدد صحيح على عدد صحيح باستثناء إشكاليات الصفر).

حالات خاصة: يكون العدد عادياً إذا كان عشرياً والعدد ما بعد الفاصلة مكرر وغير منتهي مثاله :

-1,6-ومن الممكن أن يكون التكرار بتراتيبة معينة ليس عدد واحد بعد الفاصلة فمن الممكن تكرار عددين فما فيجب الانتباه جيدً ومثاله –3,347347-

يكون العدد عادياً إذا كان عشرياً والأعداد مابعد منتهية ومثاله :– $\frac{3}{2} = 1,5$ -(غير مكررة)

هل يكون العدد عادياً إذا كان عشرياً والأعداد مابعد الفاصلة مكررة ومنتهية ؟ صح

مجموعة الأعداد غير العادية -Q– وهي مجموعة الأعداد العشرية أيضاً ولكن نميزها عن مجموعة الأعداد العادية –Q – بحالاتها الخاصة ، ونلفت النظر إلى أعدادها القليلة.

حالات خاصة: يكون العدد غير عادياً إذا كان عشرياً والأعداد ما بعد الفاصلة غير مكررة وغير منتهية ومثاله: $\sqrt{2}$ – 3,14\= $\frac{22}{7}$

Info: –**Sin41**– مازال في إشكالية إلى الآن حول قيمته و فلم يحدد ما إذا كان عدداً عادياً أو غير عادياً.

مجموعة الأعداد الحقيقية -IR– هي اجتماع الأعداد العادية وغير العادية-IR=QUQ-

مجموعة الأعداد العقدية –Ȼ–من الشكل العام – Ȼ = a + ib-

حيث -1 = i^2– وتعتبر هذه المجموعة أكبر المجموعات العددية وأشملها.

الأعداد المركبة كتسمية رياضياً أصح من الأعداد العقدية complex– فكلمة —complex كلمة علمية طبية أكثر مما هي رياضية .

العدد-1- هو عدد حقيقي وعادي وغير عادي وصحيح وطبيعي ومركب و فهو يحقق الشكل العام للأعداد المركبة : -1 = 1+ oi-

Conclusion: كل عدد هو مركب ، فهي المجموعة الأكبر والأشمل لكل المجموعات.

Info2: $a^3 = a \times a \times a.$

$a^2 = a \times a.$

$a^1 = a.$

اصطلاح : أي عدد أسّه صفر يساوي الواحد.(Why?) $a^0=1$

$A^0= a^{b-b=0}=a^b.a^{-b}= \frac{a}{a}=1$

حيث $\frac{a}{a}=1$ لأن القسمة على صفر غير ممكنة $a \neq 0$

في حالات عدم التعيين : $\frac{0}{0}$ لا تساوي الواحد، لا تحقق 1

$$O^0=O^{b-b}=O^{b-b}.O=\frac{O}{O}=\frac{o}{o} \quad (Why?)$$

حالة عدم تعيين

لكن $1/\infty=0$

:InFo3

$3!=3\times 2\times 1.$

$2!=2\times 1.$

$1!=1.$

$0!=1.$

$n!= n(n-1)........3\times 2\times 1.$

:Info4

$\sum^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$

$\sum^3 a=a+a+a=3a$

هنا لا يوجد دليل أو نلاحظ أنه لا يؤثر على العنصر a

$:\prod^3 a_i = a_1 \times a_2 \times a_3$

$\prod^3 a = a \times a \times a = a^3$

II-التكرار والتكرار النسبي

II-1التراتيب والتوافيق

Frequency and relative frequency

Orders and combinations.

1- لنختار (m) من (n) عنصر بشكل مرتب ، يكون عندئذٍ قانون التراتيب على النحو التالي:

$$P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

لا يعتمد قانون التراتيب على هذا الشكل لأنه من الممكن أن يأخذ شكل آخر عند نيوتن ، لذلك لتفادي اختلاط الأفكار نعتمد الشكل التالي $P^n m$

ويمكن أن نكتب قانون التراتيب على نحو آخر:

$$P(n,m) = n\,(n-1\,.\,(n-2)........(n-m+1)$$

ليكن قانون التراتيب:

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

إذا كان عدد الاختيارات يساوي عدد العناصر (المجموعة بكاملها مختارة) -n=m-عندئذٍ:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3_x 2_x 1$$

$$0! = 1 / \longrightarrow \mathbf{P(n,m)} = \frac{n!}{o!} = n!$$

Info: العاملي هو نوع من أنواع الدوال المتسامية وليس الجبرية ، فلا يمكن إجراء عليها العمليات الحسابية الجبرية أي لا تكون محققة ، وكذلك دوال اللّوغاريم، و cos,sin تُعتبر من الدول المتسامية فقط عملية الاختصار محققة لا أكثر (الضرب والقسمة والجمع والطرح) مثلاً: $3!_x 3! \; x\; 2 \; x \frac{6!}{3!}$

في حالة اختيار (m) من (n) عنصر بشكل عشوائي ، يكون عندئذٍ قانون التوافيق على النحو التالي:

$$\mathbf{C(n,m)} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{m!(n-m)!}}$$

Note: في أي حالة يكون عدد الاختيارات أكثر التراتيب أم التوافيق ؟

التراتيب عدد اختياراتها أكثر من التوافيق لأن في التراتيب هناك ما يُدعى بالتبادليل لأن الترتيب مهم أما في التوافيق بما أن الاختيار عشوائي فالترتيب غير مهم وبالتالي لا تباديل التي من عدد الاختيارات.

كذلك يمكن تفسير ذلك رياضياً حسب القوانين لكل من التراتيب والتوافيق:

$$\mathbf{C(n,m)} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad \mathbf{P(n,m)} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

المقام أكبر من مقام التراتيب وكلما كبر المقام صَغُرَ الكسر وبالتالي التراتيب يكون عدد اختباراتها أكثر.

هناك علاقة ما بين التوافيق والتراتيب:

$$\mathbf{C(n,m)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m!}}.\mathbf{P\,(n,m)}$$

II2-التراتيب عند التكرار

The orders at frequency.

مداخلة (أمثلة توضيحية):

لنفرض أنه قد تم رمي قطعة نقود 10مرات وكان قد ظهر أحد الأوجه أياً كان 6مرات فيكون عدد مرات ظهور الوجه الآخر 4مرات.

نقول نسبة احتمال ظهور عدد الأوجه أياً كان - $\frac{6}{10}$— فيكون احتمال ظهور الآخر -$\frac{4}{10}$—

ومجموعهما هو احتمال فضاء العينة للتجربة ويساوي الواحد:

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{10}} = \mathbf{1}$$

Note: نستنتج أن التكرار النسبي هو عبارة عن احتمال .

لنفرض أنه قد تم رمي قطعة النقود ذاتها عدد كبير جداً من المرات –n مرة : n: عدد مرات الرمي.

فظهر أحد الأوجه أياً كان –m- مرة عندئذٍ يكون مرات ظهور الوجه الآخر هو -n-m-مرة-

نقول نسبة احتمال ظهور أحد الأوجه الذي كانت عدد مرات ظهوره -m– تمثل بالنسبة -$\frac{m}{n}$- والتي تعبر عن التكرار النسبي.

منطقياً ورياضياً يجب أن تسعى النسبة إلى الصفر لأن المقام –n – الذي يُمثل عدد مرات الرمي كبير جداً جداً فقيمة الكسر صغيرة جداً جداً تسعى إلى الصفر .

$$L\frac{m}{n} = \frac{m}{\infty} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

$$n = \infty$$

ولكن –m- في البسط عدد متغير ، فهذا قد يُحدِث فرقاً نوعاً ما.

حالات خاصة: عدد مرات ظهور أحد الأوجه أياً كان $m=0$ نهاية النسبة:

$$\frac{m}{n} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\rightarrow\infty$$

ولكن هذا ليس بواقعياً ، فمن غير الممكن حصول ذلك حتى أنه بعيد عن الواقع والمنطق.

عدد مرات ظهور أحد الأوجه أياً كان –m- يساوي عدد مرات الرمي -n– $m=n$ فتكون نهاية النسبة:

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad \rightarrow \infty$$

كذلك هذا ليس بواقعياً ، صحيح منطقياً ولكن من المستحيل حصوله في الواقع.

فنصطلح: إذا كانت n أكبر بكثير -n>>>>>- تكون نهاية النسبة تسعى إلى النص– $\frac{1}{2}$-

$$-\frac{m}{n} = \frac{1}{2} why?$$

نقول أن n تسعى إلى $(\frac{1}{2})$ وذلك كقيمة وسطية أي لا للصفر $\frac{1}{2}$ $\longleftarrow$ n

ولا للواحد.

هذا يعني احتمال ظهور أحد الأوجه أياً كان هو – $\frac{1}{2}$ -

Note: نستنتج أن التكرار النسبي ما هو إلا احتمال من رمية واحدة.

قانون التكرار النسبي= $\frac{\text{عدد النواتج}}{\text{عدد مرات التجربة}}$

لنفرض أن اختيارنا ل—**m**عنصر من-**n**- عنصر لحادثة تحتوي على من العناصر المتشابهة، وتحتوي أيضاً على -**m_2**– من العناصر المتشابهة ، كذلك **$m_3, m_4, ...m_r$** من العناصر المتشابهة

في هذه الحالة يكون قانون التراتيب عند التكرار أو التشابه على النحو الآتي:

$$P^n(m_1,m_2,m_3,.......m_r)=\frac{n!}{m!.m2!.m3!....mr!}$$

بفرض حالة عدم وجود تشابه وتكرارعندئذٍ يكون قانون التراتيب عند التكرار والتشابه على النحو الآتي:

$$P^n(1) = \frac{n!}{1} = n!$$

Example 1: How many words could be formed from the letters of the following words?

a)House **b) Book** **C) Missisippi.**

Solution: a) $P^5(1)=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

b) $P^4(2)=\frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!} = 12$

C) $P^{10}(4,3,2)=\frac{10!}{4!\times3!\times2!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1\times2\times1} = 12600$

Example 2: For A ={a1, a_2 ,a_3 ,a_4} and for P (A) function probability , for P (a_2) = $\frac{1}{3}$, P (a_3)= $\frac{1}{6}$, P(a_4) =$\frac{1}{9}$ and $a_1 \cap a_2 = \emptyset$,Find P (a_1U a_2)?

Solution: P (a_1U a_2)= P (a_1) + P (a_2) –P ($a_1\cap$ a_2) (*)

But we know:

P (a_1) + P (a_2) + P (a_3) + P (a_4) =1

P (a_1) =1-[P (a_2) + P (a_3) + P (a_4)]

P (a_1) = $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{18-6-3-2}{18}=\frac{7}{18}$

نعوض بـ *:

$$P(a_1 \cup a_2)=\frac{7}{15}+\frac{1}{3}-0=\frac{7}{18}+\frac{6}{8}=\frac{13}{18}$$

Example 3: Student has to answer 10 from 13 questions :

a)In how many ways could we do that?

b) In how many ways could we di that if?

The first and second questions were obligatory?

C) In how many ways could we do that If he should answer 3 questions of the first five questions?

Solution: a) C^{13}_{10} = C(13,10) = $\frac{13!}{10!(13-10)!}=\frac{13\times12\times11\times10!}{10!(3!)}=$
$\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=13\times2\times11=286.$

b) $C\,8^{11}=\frac{11!}{8!(11-8)!}=\frac{11\times10\times9\times8!}{8!(3!)}=165.$

C) $C\,3^{5}.C\,7^{8}=\frac{5!}{3!(5-3)}\times\frac{8!}{7!(8-7)!}=\frac{5\times4\times3!}{3!(2!)}\times\frac{8\times7!}{7!(1!)}=10\times8=80$

Note: في التوافيق إذا كانت n=m يكون الناتج مساوياً للواحد . أما إذا كان الفرق ما بينهما مساوياً للواحد يكون الناتج هو n:
وذلك لتسهيل العمليات الحسابية.

Example 4: for P(Ā) =$\frac{2}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ $and\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, Find P(B) and P(A∩B) ?

Solution: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

P(A)=1 –P(Ā)= $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(A\cap B) = P(A) \rightarrow P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B) =$$
$$\frac{1}{3} - P(A\cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

3-II المجتمع والعينة

1-3-II جدول التوزيع والتكرار

Population and sample.

Distribution table and frequency.

لنفترض أن الفضاء العشوائي لتجربة ما يُعطى بالشكل:

$$\{x_1,x_2,x_3,\dots\dots x_n\}$$

نميز حالتين / احتمالين إما أن تكون المشاهدات مباشرة التي لا يشترط فيها التكرار بشكل ملحوظ ممكن حالة أو حالتين أو أنها تمثل فئات الذي من المفترض فيها التكرار بشكل مؤكد ضمن المجالات.

- ما الفرق بين الحالتين؟

نلاحظ أنه في كلا الحالتين يرافق ذلك تكرار —Frequency

فيكون التكرار -Fi– يعطى بالشكل :

$$\{F_1,F_2,F_3,\dots\dots\dots\dots\dots F_n\}$$

لنأخذ التكرار في جدول ونسّميه جدول التكرار -Frequency table-

Xi	X1	X2	X3	....	xn
Fi	F1	F2	F3	....	Fn

لنأخذ تراكم التكرار في جدول ونسميه جدول التوزيع التكراري

Frequency distribution table—

Xi	X1	X2	X3	......	Xn
Fi	F1	F2	F3	....	Fn
F.D.t	H1	H2	H3	....	Hn

((Vital statistics))

حيثُ:

$*h_1=F_1$

$*h_2=F_1+F_2=h_1+F_2$

$*h_3=F_1+F_2+F_3=h_2+F_3$

$*h_n=F_1+F_2+F_3\dots\dots\dots\dots F_n= h_{n-1}+F_n$

مثال تطبيقي بسيط: لتوضيح أكثر للحالة نأخذ مثال لتوضيح البيانات ونمثلها بتمثيلات بيانية معينة من أجل "s" عينة تم إجراء إحصائية لدرجات الطلاب في الثالث الثانوي في مادة الرياضيات وكانت النتائج كالتالي:

Xi	Fi
[20-30[	5
[30-40[	10
[40-50[	4
[50-60[	2

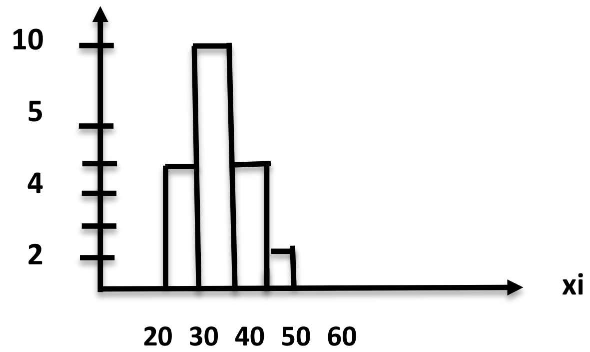
هذا المثال الكيفي يمثل فئات (نظام مجالات) وليس مشاهدات مباشرة فالتكرار واضح وهذه المعطيات تمثل جدول تكرار.

هناك تمثيلات بيانية إحصائية معينة تعمل على توضيح أكثر للعينة الإحصائية منها ما يسمى بمضلع التكرار وآخر بمنحني التوزيع .

1. مضلّع التكرار: (Frequency Polygon)

هو عبارة عن تمثيل بياني يمثل مستطيلات قواعدها ثابتة الطول وتساوي (Fi_{+1}-xi)كما أنها متلاصقة ببعضها البعض وارتفاعاتها تمثل التكرار .

Note: في جدول التكرار عادة المشاهدات تمثل فئات (نظام مجالات) فيكون كل مجال على محور xxيرافقه قيمة معينة على ارتفاع (التكرار) الذي هو محور .



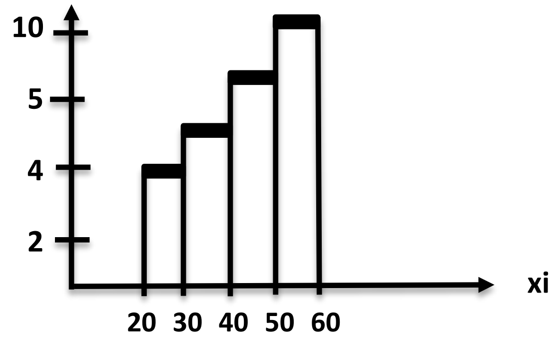
طريقة رسم مضلّع التكرار:

نأخذ منتصف القاعدة العليا من كل مستطيل نصل بالمسطرة بين النقاط ، فنحصل على مضلّع التكرار ، تمسح الشرائح المستطيلية الشكل عن طريق الحواسيب ويبقى المضلع كشكل بياني يمكن لنا من خلاله قراءة البيانات الإحصائية بصورة أوضح: أنها تعطى نظرة تحليلية إحصائية شاملة.

2. منحني التوزيع (Distribution curve):

هو عبارة عن تمثيل بياني يمثل مستطيلات متساوية البعد عن المحور الأفقي وتساوي (Xi_{+1} –Xi) كما أنها متلاصقة ببعضها البعض – كمضلع التكرار – وارتفاعاتها تمثل تراكم التكرار وليس التكرار.

hi



طريقة رسم منحني التوزيع: نأخذ الزاوية المنحني العليا من كل مستطيل نصل بين النقاط باليد وذلك كي لا تضيع من الشرائح فنحصل على منحني التوزيع:

Example: For S is a sample consists of 35 students and the age of each student written in the following table:

19	20	20	20	20	21	21
21	21	21	22	22	23	25
25	25	28	29	33	34	34
35	35	37	37	38	38	39
41	44	45	46	46	61	62

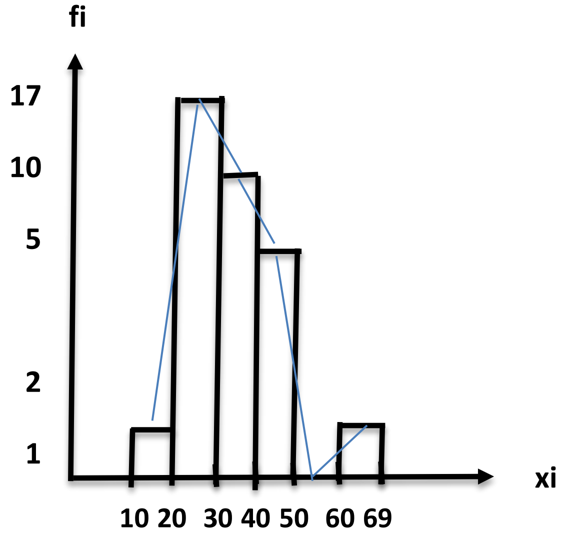
1.Put data in order in frequency table from 10 – 19 up to 60 – 69 and find frequency distribution table

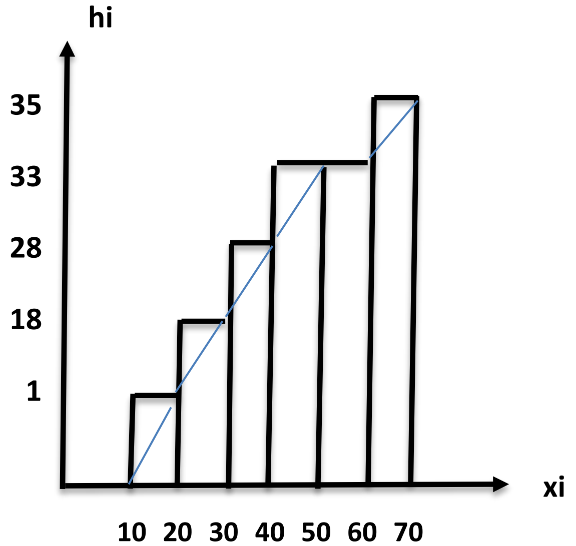
2.Find frequency pdygon and distribution curve

Solution:

Xi	(10 , 20)	(20 , 30)	(30 , 40)	(40 , 50)	(50 , 60)	(60 , 70)
Fi	1	17	10	5	0	2
Hi	1	17	28	33	33	3

مضلع التكرار:





لتحديد طول الفئة نختار علاقة ستورجز sturges

$$C = \frac{(M-m)}{1+3.322.\log(n)}$$

M أكبر مفردة في البيان الاحصائي

m أصغر مفردة في البيان الاحصائي

ويمكن استخراج طول الفئة من خلال العلاقة الاخرى لستورجز

$$C = \frac{\text{المدى}}{K}$$

K عدد الفئات المراد اختيارها حيث :

$$K = \sqrt{n}$$

اما التكرار النسبي : هو التكرار مقسوماً على مجموع التكرارات مضروباً ب100 ويرافق ذلك

تكرار تنازلي نسبي

تكرار تصاعدي نسبي

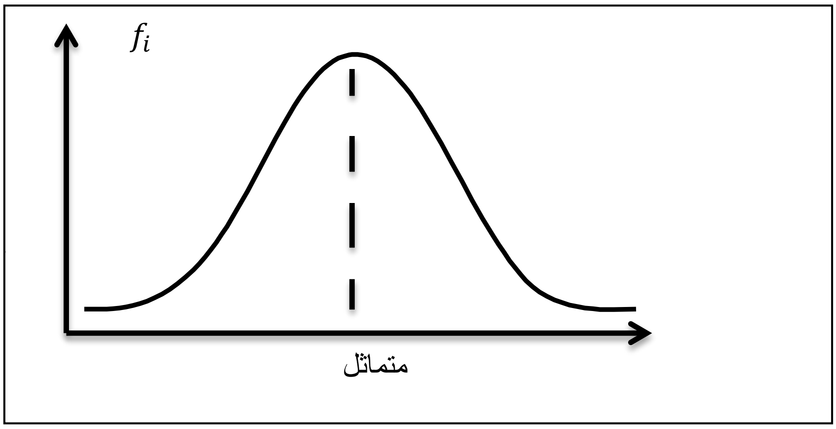
تختلف التوزيعات التكرارية (التوزيع الطبيعي المعياري) هو المنحني الذي يمثل الجرس المقلوب (اما اذا لم يكن متماثلاً فأنه يعاني من الالتواء فالالتواء يعطى بالعلاقة:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\bar{X} - Mod}{S_x} = \frac{3(\bar{X} - Med)}{S_x}$$

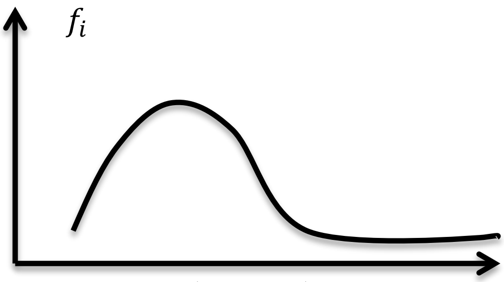
1- معامل الالتواء صفر (التوزيع التكراري طبيعي أو متماثل $\bar{X} = Mod = Med$

2- معامل الالتواء موجب (التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليمين $\bar{X} > Mod > Med$

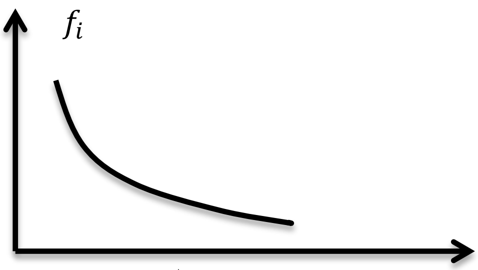
3- معامل الالتواء سالب (التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليمين $\bar{X} < Mod < Med$



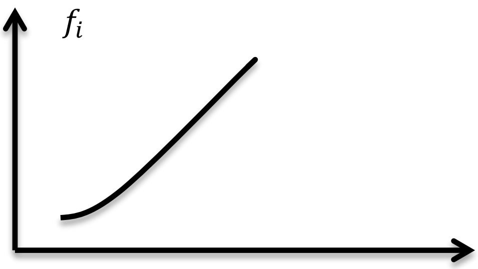
ملتوي نحو اليسار



ملتوي نحو اليمين



منحني تنازلي



منحني تصاعدي

مثال : بفرض لدينا بيان عددي مؤلف من أطوال 50 طالب في قسم علم الحياة في كلية العلوم كانت موزعة كالآتي :

150,155,157,158,159·160,161,163,164,165×5,166,167,169·170,171×11,172,
173,175,176,177×5,178,179,181,182,183×3,185×2,187,190×2

المطلوب : 1− أحسب طول الفئة حسب علاقة ستور جز

2 – أوجد الجدول التكراري والتكرار النسبي

3 – اوجد التكرار التنازلي النسبي والتكرار التصاعدي النسبي