فيزياء البلازما — سنة رابعة — حل أسئلة على مقرر البلازما 2023 - 2024

1) عرّف ما يلي: (السؤال دورة)

البلازما: هي حالة المادة المكونة من جسيمات مشحونة و متعادلة، على أن يكون المجموع الجبري للشحنات الكهربائية يساوي صفراً. وعموماً فإن البلازما هي حالة المادة أثناء وجودها بدرجة عالية من التأين، أي عندما تتحول ذرات المادة إلى أيونات موجبة مع الكترونات سالبة.

كيف يتم الحصول على البلازما؟

نحصل على بلازما بالتأين، ويتم الحصول على بلازما كنتيجة تصادم الإلكترونات والأيونات بالذرات المتعادلة، ومن تصادم الذرات المتعادلة فيما بينها. أما الحصول على بلازما متفككة أو قليلة التأين فيتم بوساطة ما يسمى التأين في المجالات الكهربائية، أو التأين بالإشعاع ذي الطاقة الكامنة للتأين.

غلاف ديباي: يمكن تعريفه بأنه معدل المسافة التي يقع فيها تأثير المجال الكهربائي لجسيم مشحون، وهذا يعني أن الجسيمات المشحونة تترتب بحيث تلغي أي مجال كهربي ستاتيكي خارجي خلف مسافة تقارب طول ديباي.

كرة ديباي: هي الكرة التي نصف قطرها يساوي طول ديباي، وحجمها يساوي

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{K T_e}{4\pi e^2 n_e}\right)^{3/2}$$

2) اذكر الفرق بين الوسط الغازي والوسط البلازمي من حيث:

درجة الحرارة - الموصلية الكهربائية - التأثر والتأثير بالمجالات الكهرومغناطيسية

الجواب ⟸ (سؤال دورة)

يمكن أن تكون البلازما من الحالة الصلبة (أشباه الموصلات)، أو الحالة السائلة (المحاليل الالكتروليتية)، أو الحالة الغازية (طبقات الأيونوسفير)

- درجة حرارة البلازما أعلى من درجة حرارة الغاز.
- البلازما موصلة للكهرباء، بينما الغاز رديء التوصيل.
- البلازما تؤثر وتتأثر بالحقول الكهرومغناطيسية في حين لا ينفذ الحقل [illegible] المغناطيسي في البلازما إلا في حالة كون كثافة ودرجة حرارة البلازما قليلة، في حين أن الغازات لا تتأثر بالحقول الكهرومغناطيسية أيا كانت كثافة.

3) علل ما يلي: (3 دورات)

1- البلازما مادة دايا مغناطيسية:

ينتج عن دوران الجسيمات المشحونة تياراً كهربائياً يدور معاكساً يولد حقلاً مغناطيسياً، يكون هذا الحقل معاكس للحقل المغناطيسي المطبق من الخارج. لذا سميت البلازما مادة دايا مغناطيسية لأنها تولد حقلاً مغناطيسياً معاكساً للمجال المغناطيسي الأصلي المطبق من الخارج.

2- لحساب طول ديباي نستخدم درجة الحرارة الالكترونية وليس درجة حرارة الأيونات، لأن كتلة الالكترونات أقل من كتلة الأيونات وهي القدرة على الحركة أكثر من الأيونات لذلك يحسب طول ديباي على أساس الالكترونات وليس على أساس الأيونات.

3- نصف قطر كارمر r_L للأيون أكبر من نصف قطر كارمر للإلكترون، لأن كتلة الأيون أكبر من كتلة الإلكترون.

⟸

تكملة (3) .. تحاليل ..

4- تأثير المجال المغناطيسي على جسيم مشحون ساكن معدوم،
لأن الحقل المغناطيسي لا يؤثر على الجسيمات الساكنة

5- التيار الناتج عن سرعة الانجراف من المجال الكهربائي
* من البلازما المحايدة (المتعادلة) معدوم،
لأن الكثافة الكلية للشحنات أو التيار يساوي الصفر.

6- يستخدم المجال المغناطيسي لحصر البلازما.
تحول حركة الإلكترونات الأفقية إلى طاقة عمودية.

7- تبقى طبقة الأيونوسفير تدور حول الأرض الأرضية ولا تنجذب نحو مركز الأرض بتأثير قوة الجذب، لأن قوة الجذب لهذه الطبقة تكون عمودية على المجال المغناطيسي وبالتالي فإن سرعة الانجراف تكون عمودية على كلاً من $\vec{B}$ و $\vec{g}$ وبالتالي فإن تتحرك في مستوى عمودي على $\vec{g}$ أي تدور حول الأرض.

---

(4) احسب القياس الفضائي المكاني (حول ديباي) λ_D، والزمان τ، و N عدد الجسيمات التي يمكن حصرها في كرة ديباي وذلك في غاز متأين درجة حرارة الإلكترونات فيه $T_e = 3\times10^4 K$ وكثافة الجسيمات $n_e = 10^{19} m^{-3}$

سؤال وزاري

$e^2 = 14.4\times10^{-10} eV.m$ ، $n_e = 10^{19} m^{-3}$
$K_B = 8.62\times10^{-5} eV.K^{-1}$
$T_e = 3\times10^4 K$: المعطيات

$e^2 = 14.4\times10^{-10} eV.m$ $\quad n_e = 10^{19} m^{-3}$
$k_B = 8.62\times10^{-5} eV.K^{-1}$
$m_e = 9.1\times10^{-31} Kg$

المطلوب:
$\lambda_D = ?$ ①
$N = ?$ ② $\quad \tau = ?$ ③

لحساب طول ديباي نستخدم العلاقة:

$$\lambda_D = \left(\frac{K_B \cdot T_e}{4\pi e^2 \cdot n_e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_D = \left(\frac{8.62\times10^{-5} eV.K^{-1} \times 3\times10^4 K}{4\pi \times 14.4\times10^{-10} e V.m \times 10^{19} m^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_D = 3.78\times10^{-6} \quad m$$

لحساب τ نحسب أولاً ω_{pe} :

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi \cdot e^2 \cdot n_e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi \times 14.4\times10^{-10} \times 10^{19}}{9.1\times10^{-31}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{pe} = 4.459\times10^{20} \quad Hz$$

$$\rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega_{pe}} = \frac{2\pi}{4.459\times10^{20}}$$

$$\tau = 1.4\times10^{-20} \quad sec$$

لحساب عدد الجسيمات N :

$$N = \frac{4}{3}\pi \lambda_D^3 n_e \simeq$$

$$N = \frac{4}{3}\pi (3.78\times10^{-6})^3 \times 10^{19}$$

$\simeq 2262.37$ جسيمة.

≈ 2262 جسيمة

ملاحظة

في حال طلب حساب التردد f_{pe}

$$f_{pe} = \frac{1}{\tau}$$

5. تخضع بلازما لتأثير مجالات كهربائية ومغناطيسية يمكن دراسة حركة الجسيم المشحون باستخدام العلاقة $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \ldots\ldots$

أ. أثبت أن الطاقة الحركية للجسيم المشحون لا تعتمد على شدة المجال المغناطيسي.

يمكن دراسة حركة الجسيم المشحون تحت تأثير قوة لورنز باستخدام قانون نيوتن الثاني:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{E} + (\vec{v}\times\vec{B})] \quad \ldots(1)$$

بضرب طرفي هذه العلاقة سلمياً بمتجه السرعة $\vec{v}$ نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = q\vec{v}\,\vec{E} \quad \ldots(2)$$

لأن $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = 0$

يستنتج من العلاقة (2) أن الطاقة الحركية للجسيم المشحون لا تعتمد على شدة الحقل المغناطيسي.

ب. بفرض أن المجال الكهربائي $\vec{E}$ ينتج من جهد كهربائي سلمي ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$)، استنتج قانون حفظ الطاقة الكلية.

بما أن القوة المؤثرة هي قوة محافظة فهي تشتق من كمون أي أن:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \ldots(3)$$

بالتعويض في (2) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -q(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\phi) \quad \ldots(4)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= -q\frac{d\phi}{dt}$$

بالنقل للطرف اليساري $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + q\phi\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = const \quad \ldots(5)$$

أي أن مجموع الطاقتين الحركية والكامنة للجسيم والناتجتين عن الحقل الكهربائي يبقى ثابتاً.

وهو قانون حفظ الطاقة.

ت. بفرض أن المجال $\vec{B}$ باتجاه المحور z، وبفرض أنه: $(\vec{B} = B\vec{e}_z)$

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$$

استنتج (v_x, v_y, v_z) مركبات السرعة في المحاور الإحداثية، وما نوع الحركة وفق المحور z؟

نعوض $\vec{E}$ و $\vec{B}$ بدلالة المركبات في معادلة الحركة (قانون لورنز)

$$m\frac{d}{dt}(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z)$$

$$= q\left[E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z + \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ v_x & v_y & v_z\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}\right]$$

$$= q[E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z + v_yB\vec{e}_x - v_xB\vec{e}_y]$$

$$= q[(E_x + v_yB)\vec{e}_x + (E_y - v_xB)\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z]$$

لمساواة المركبات المتناظرة (بين أمثال $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) بين الطرفين، نحصل على:

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m}(E_x + Bv_y), \quad \dot{v}_y = \frac{q}{m}(E_y - Bv_x),$$

$$\dot{v}_z = \frac{q}{m}E_z \quad \ldots\ldots(1)$$

نجد من المعادلة الثالثة في (1):

$$\dot{v}_z = \frac{q}{m}E_z \text{ أن:}$$

$$\dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}E_z \Rightarrow dv_z = \frac{q}{m}E_z\,dt$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{q}{m}E_zt + v_z(0) \quad \ldots(2)$$

وهي حركة متسارعة وفق المحور z (باتجاه B).

عندما $\vec{E} = 0$، فإن الجسيم يتحرك بسرعة ثابتة $v_z(0)$ باتجاه المحور z.

ث. بفرض أن $v_x = \frac{q}{m}(E_x \pm Bv_y)$

$$v_y = \frac{q}{m}(E_y + Bv_x)$$

أثبت أن مركبتي السرعة v_y, v_x، تنطبقان بالعلاقتين:

$$v_x = U\sin(\omega t - \varphi) + \frac{E_y}{B}$$

$$v_y = U\cos(\omega t - \varphi) - \left(\frac{E_x}{B}\right)$$

ثم، الحل:

يمكننا إيجاد مركبات السرعة v_x و v_y من معادلة الحركة في (1) بالنسبة للزمن:

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y \quad \dots (3)$$

بالتعويض عن v_y من المعادلة الثانية من المعادلات (1) في (3) نحصل على:

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\left[\frac{q}{m}(E_y - Bv_x)\right] = \frac{q^2B^2}{m^2}\left(\frac{E_y}{B} - v_x\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = \omega_c^2 \frac{E_y}{B} \quad \dots (4)$$

تمثل معادلة تفاضلية بحلها العام الحركة التوافقية:

الأول: $U\sin(\omega_c t - \varphi)$

حيث U و φ ثابتي التكامل

الثاني: (الحل الخاص) $v_{x_0} = \frac{E_y}{B}$

وبذلك يكون الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$v_x = U\sin(\omega_c t - \varphi) + \left(\frac{E_y}{B}\right) \quad \dots (5)$$

ويمكننا إيجاد v_y من المعادلة الأولى في (1) كما يلي:

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m}(E_x + Bv_y) \Rightarrow v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x - \frac{E_x}{B} \quad \dots (6)$$

نوجد $\dot{v}_x$ من (5) ونعوضها في (6) نجد أن:

$$v_y = U\cos(\omega_c t - \varphi) - \left(\frac{E_x}{B}\right) \quad \dots (7)$$

نلاحظ أن السرعات في المستوى العمودي على $\vec{B}$ (في المستوى xy) تتغير بتواترات مساوية للتواتر السيكلوتروني ω_c وإضافة إلى حركة انجراف في هذا المستوى وسرعة تساوي:

$$\vec{v}_0 = \frac{E_y}{B}\vec{e}_x - \frac{E_x}{B}\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} \quad \dots (8)$$

يمكن كتابة هذه السرعة بالصيغة:

* نلاحظ أن سرعة الانجراف $\vec{v}_0$ لا تتعلق على كتلة الجسيم m، وكذلك نوعه وعلى شحنته التي يحملها الجسيم.

{دورة} 1

- يؤثر مجال مغناطيسي شدته 2 tesla عمودياً على الورقة، ويوجد مجال كهربائي مقداره $\left(100\ \frac{V}{cm}\right)$

ما هي سرعة البازما؟ $\vec{v}_0 = ?$

$$v_0 = \frac{E}{B}$$

قبل التعويض في القانون يجب إيجاد السرعة فيجب إيجاد العلاقة بين الواحدات:

$$[E] = \frac{U}{m}$$

$$\frac{100V}{cm} = \frac{100V}{10^{-2}m} = 10^4\frac{V}{m}$$

$$V.S = T.m^2$$

إذاً:

$$E = \frac{10^4 V}{m} = \frac{10^4 V.S}{m.S} = \frac{10^4 T.m^2}{m.S}$$

$$= \frac{10^4 T.m}{S}$$

$$\rightarrow v_0 = \frac{E}{B} = \frac{10^4 T.m}{2T.S}$$

$$= 5\times10^3 m/S$$

7. احسب الطاقة الحركية الناتجة عن سرعة انجراف الالكترون والأيون اذا كان المجال الكهربائي حاوي $(10\ \frac{KV}{cm})$ والمجال المغناطيسي يساوي $20KG$، ونفرض أن المجال الكهربائي موجه على المجال المغناطيسي.

ملاحظة: $1T = 10^4 G$, $1T = 1\frac{Weber}{m^2}$

$1Weber = 1V.sec$

الحل:

نعلم سرعة الانجراف بالعلاقة التالية:

$$\vec{v_D} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{E.B.\sin \pi/2}{B^2} = \frac{E}{B} = \frac{10 \times 10^3 V}{10^{-2} m} \Big/ 20 \times 10^3 G$$

$$\rightarrow v_D = \frac{10^6 V/m}{2 \times 10^4 \times 10^{-4} T} = \frac{10^6 N/m}{2 N/Am^2} = 5 \times 10^5 m/s$$

وبالتالي فإن الطاقة الحركية الناتجة عن حركة الانجراف تساوي بالـ:

$$T = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} \times 9.1 \times 10^{-31} \times (5 \times 10^5 m/s)^2$$

$$= 113,75 \times 10^{-21} \times kg \frac{m^2}{s^2} = 113,75 \times 10^{-21} N.m$$

$$= 113,75 \times 10^{-21} Joul$$

ملاحظة: $1eV = 1,6 \times 10^{-19} J$

$$\rightarrow J = \frac{1}{1.6} \times 10^{+19} eV$$

$$T = 113,75 \times 10^{-21} \times \frac{1}{1.6} \times 10^{+19} eV$$

$$= 71 \times 10^{-2} eV$$

8. احسب ω_c التردد الدوراني ونصف قطر لارمور لالكترون طاقته الحركية $10eV$ يتحرك عمودياً على المجال المغناطيسي الذي شدته $3000\ G$.

طاقة الأيون: $T_i = 1eV$

الحل: التردد الدوراني للالكترون يساوي بالمطلق (الالكتروني يساوي إلى):

$$\omega_c = \left|\frac{qB}{m}\right| = \left|\frac{1.6 \times 10^{-19} C \times 3 \times 10^3 G}{9.1 \times 10^{-31} kg}\right|$$

$$\omega_c = \frac{1.6 \times 10^{-19} C \times 10^3 \times 3 \times 10^{-4} T}{9.1 \times 10^{-31} kg} = 0.527 \times 10^{11} \frac{CT}{kg}$$

$$\rightarrow 1T = 10^4 G \Rightarrow 1G = 10^{-4} T$$

$$\rightarrow \omega_c = 0.527 \times 10^{11} \frac{kg \frac{m^2}{V} \cdot \frac{W}{m^2}}{kg}$$

$$= 0.527 \times 10^{11} \frac{W}{S^2 V} = 0.527 \times 10^{11} \frac{V.S}{S^2 V}$$

$$= 0.527 \times 10^{11} S^{-1}$$

بنفس العلاقة يمكن حساب التردد الدوراني للأيون مع استبدال كتلة الالكترون بكتلة الأيون التي تساوي $m_p = 1,67 \times 10^{-27} kg$.

يعطى نصف قطر لارمور بالعلاقة التالية:

$$r_L = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{v_\perp}{\omega_c}$$

حيث أن $v_\perp$ هي السرعة العمودية.

على B ولحساب r_L يجب حساب $v_\perp$ وهذا نستنتج من عبارة الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2} m v_\perp^2 \Rightarrow v_\perp^2 = \frac{2T}{m}$$

$$= \frac{2 \times 10 eV}{9.1 \times 10^{-31} kg} = \frac{2 \times 10 \times 1.6 \times 10^{-19} J}{9.1 \times 10^{-31} kg}$$

$$= 0.35 \times 10^{13} \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{kg}$$

$$\rightarrow v_\perp^2 = 35 \times 10^{10} \frac{m^2}{s^2} \rightarrow v_\perp = 18,7 \times 10^5 m/s$$

بالتالي نصف قطرة مور يساوي بالـ:

$$r_L = \frac{18,7 \times 10^5 m/s}{0.527 \times 10^{11} rad/s} = 35,5 \times 10^{-6} m$$

فيزياء البلازما

9) تدور جسيمات مشحونة حول مجال مغناطيسي، اثبت أن:

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{w_\perp \vec{B} \times \vec{\nabla B}}{qB^3}$$

ينتج عن دوران الجسيمات المشحونة حول المجال المغناطيسي ينشأ عزم ثنائي قطب مغناطيسي

$$\vec{\mu} = I \cdot S$$

ويكون التيار الكهربائي

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q w_c}{2\pi}$$

$$\vec{\mu} = \frac{q w_c}{2\pi} \pi r_L^2 = \frac{q w}{2\pi} \pi \frac{v_\perp^2}{w^2}$$

$$= \frac{q}{2} \frac{v_\perp^2}{w} = \frac{1}{2} m \frac{v_\perp^2}{B} = \frac{w_\perp^2}{B}$$

وتؤثر على الجسيم المشحون المتحرك حول B قوة باتجاه تناقص شدة المجال

$$\vec{F}_\perp = -\mu \vec{\nabla} B$$

$$\Rightarrow v_{\nabla B} = \left| \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \right| = \left| \frac{\vec{\mu} \vec{\nabla} B \times \vec{B}}{qB^2} \right|$$

$$= \left| \frac{w_\perp \vec{\nabla} B \times \vec{B}}{qB^3} \right|$$

وهو المطلوب

10) يترك جسيم شحنته q من سكون كما بالشكل ومنتظم ($\vec{B} = 0,\ \vec{E} \neq 0$)

أ. اكتب معادلة حركة الجسيم في هذه الحالة بالصيغة:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + 0$$

ب. تساوي سرعة الجسيم بالشكل

$$\vec{v} = \left(\frac{q\vec{E}}{m}\right) t + \vec{v}_0$$

ت. تكون معادلة مسار الجسيم مساوية إلى

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{q\vec{E}}{m}\right) + \vec{v}_0 t + r_0$$

ث. كيف تكون جهة تسارع الجسيم؟ هل يتعلق تسارع الجسيم بشحنته؟ وضح ذلك.

نستنتج أن الجسيم يتحرك بتسارع ثابت $\frac{q\vec{E}}{m}$ تكون جهة هذا التسارع في اتجاه المجال E إذا كانت $q > 0$ ويكون عكس اتجاه E إذا كان $q < 0$ ولا يوجد تسارع في المجال E إذا كان $q = 0$ ويكون التسارع عكس الاتجاه للمجال E إذا كان $q < 0$ ولا يوجد تسارع في الاتجاه العامد لـ E.

تمرين بالإرشاد - سنة رابعة م.

(11) يتحرك جسيم شحنته q وكتلته m في مجال $\vec{B}$ منتظم وثابت، وأن $\vec{E}=0$.

أ. نقطة معادلة حركة الجسيم في هذه الحالة بالصيغة الجواب.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{v}\times\vec{B} \quad -①$$

ب. إذا أمكن كتابة السرعة $\vec{v}$ على شكل مجموع مركبتين، أي بالصيغة $\vec{v}=\vec{v}_{//}+\vec{v}_{\perp}$ -② أوجد السرعة $\vec{v}_{//}$، ثم أثبت أن السرعة $\vec{v}_{\perp}$ تساوي مقدار ثابت. وأثبت أن متجه السرعة $\vec{v}_{\perp}$ يبادري إلى $\vec{v}_{\perp}=\vec{\omega}_c\times\vec{r}_c$

حيث $\omega_c=\frac{|q|B}{m}$.

الجواب: هو من العلاقة: $\vec{v}=\vec{v}_{//}+\vec{v}_{\perp}$ -②

في العلاقة ① فنجد:

$$m\frac{d\vec{v}_{//}}{dt}+m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=q\vec{v}_{//}\times\vec{B}+q\vec{v}_{\perp}\times\vec{B}$$

($\vec{v}_{//}\times\vec{B}=0$)

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}_{//}}{dt}+m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=q\vec{v}_{\perp}\times\vec{B} \quad -③$$

بما أن الحد الناتج عن $\vec{v}_{\perp}\times\vec{B}$ هو متجه عمودي على كلاً من $\vec{B}$ و $\vec{v}_{\perp}$ فإنه نجد:

$$\frac{d\vec{v}_{//}}{dt}=0 \quad -④ \qquad , \qquad \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\frac{q}{m}\vec{v}_{\perp}\times\vec{B} \quad -⑤$$

ينتج من المعادلة ④ أن سرعة الجسيم باتجاه المجال $\vec{B}$ لا يتغير وتساوي السرعة الابتدائية، أما من أجل حركة الجسيم العمودي على $\vec{B}$، فيمكن تبسيط المعادلة ⑤ بالاختصار $\frac{q}{m}$ من الطرفين

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\vec{\omega}_c\times\vec{v}_{\perp} \quad -⑥$$

حيث: $\vec{\omega}_c$ متجه يعين بالعينة:

$$\vec{\omega}_c=-\frac{q\vec{B}}{m}=\frac{|q|B}{m}\hat{\omega}=\omega_c\hat{\omega} \quad -⑦$$

حيث $\hat{\omega}$ متجه واحدي موجه باتجاه $\vec{B}$ من أجل الجسيم سالب الشحنة وعكس $\vec{B}$ من أجل الجسيم موجب الشحنة.

وطول المقدار (الكمية) ω_c موجبة دائماً

$$\omega_c=\frac{|q|B}{m}.$$

إثبات أن السرعة $\vec{v}_{\perp}$ تساوي مقدار ثابت:

بما أن ω_c متجه ثابت ينتج من حل المعادلة ⑥ بسلمياً (داخلياً) بالمتجه $\vec{v}_{\perp}$ ينتج أن:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}\cdot\vec{v}_{\perp}=\frac{q}{m}(\vec{v}_{\perp}\times\vec{B})\cdot\vec{v}_{\perp}$$

$$=(\vec{\omega}_c\times\vec{v}_{\perp})\cdot\vec{v}_{\perp}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_{\perp}^2\right)=0 \Rightarrow \boxed{v_{\perp}=const}$$

وإثبات أن متجه السرعة $\vec{v}_{\perp}$:

بالاختصار نكامل المعادلة ⑥ مع اعتبار ω_c مقدار ثابت، وباعتبار أن $\vec{v}_{\perp}=\frac{d\vec{r}_c}{dt}$ نجد على:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$$\rightarrow d\vec{v}_{\perp}=\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{r}_c}{dt} \Rightarrow d\vec{v}_{\perp}=d(\vec{\omega}_c\times\vec{r}_c)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{\perp}=\omega_c\times r_c} \quad -⑧$$

ت- صف حركة الجسيم (أو الجسيم) باتجاه $\vec{B}$ وفي المستوي العمودي على $\vec{B}$ من أجل هذه الحالة.

صار الجسم في هذه الحالة $E=0$، $B\neq 0$ يتكون من تركيب حركتين، حركة منتظمة $\vec{v}_{//}$ جهتها باتجاه $\vec{B}$ وبسرعة ثابتة، حركة دائرية في المستوي العمودي على $\vec{B}$ بسرعة ثابتة $\vec{v}_{\perp}$ فيكون الجسيم يوصف بحركة حلزونية.

حل بقية المسألة:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\frac{q}{m}(\vec{v}_{\perp}\times\vec{B})=\vec{\omega}_c\times\vec{v}_{\perp} \quad -⑥$$

حيث: $\vec{\omega}_c$ متجه يعين بالعينة:

$$\vec{\omega}_c=-\frac{q\vec{B}}{m}=\frac{|q|B}{m}\hat{\omega}=\omega_c\hat{\omega} \quad -⑦$$

حيث $\hat{\omega}$ متجه واحدي موجه باتجاه $\vec{B}$ من أجل الجسيم سالب الشحنة وعكس $\vec{B}$ من أجل الجسيم موجب الشحنة.

وطول المقدار (الكمية) ω_c موجبة دائماً

$$\omega_c=\frac{|q|B}{m}.$$

إثبات أن السرعة $\vec{v}_{\perp}$ تساوي مقدار ثابت:

بما أن ω_c متجه ثابت ينتج من حل المعادلة ⑥ بسلمياً (داخلياً) بالمتجه $\vec{v}_{\perp}$ ينتج أن:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}\cdot\vec{v}_{\perp}=\frac{q}{m}(\vec{v}_{\perp}\times\vec{B})\cdot\vec{v}_{\perp}$$

$$=(\vec{\omega}_c\times\vec{v}_{\perp})\cdot\vec{v}_{\perp}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_{\perp}^2\right)=0 \Rightarrow \boxed{v_{\perp}=const}$$

وإثبات أن متجه السرعة $\vec{v}_{\perp}$:

بالاختصار نكامل المعادلة ⑥ مع اعتبار ω_c مقدار ثابت، وباعتبار أن $\vec{v}_{\perp}=\frac{d\vec{r}_c}{dt}$ نجد على:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}=\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$$\rightarrow d\vec{v}_{\perp}=\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{r}_c}{dt} \Rightarrow d\vec{v}_{\perp}=d(\vec{\omega}_c\times\vec{r}_c)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{\perp}=\omega_c\times r_c} \quad -⑧$$

ت- صف حركة الجسيم (أو الجسيم) باتجاه $\vec{B}$ وفي المستوي العمودي على $\vec{B}$ من أجل هذه الحالة.

صار الجسم في هذه الحالة $E=0$، $B\neq 0$ يتكون من تركيب حركتين، حركة منتظمة $\vec{v}_{//}$ جهتها باتجاه $\vec{B}$ وبسرعة ثابتة، حركة دائرية في المستوي العمودي على $\vec{B}$ بسرعة ثابتة $\vec{v}_{\perp}$ فيكون الجسيم يوصف بحركة حلزونية.

1-e) يطبق مجال مغناطيسي $\vec{B}(0,0,B)$ ثابتة ومنتظم في حيز محدود من الفراغ، خال من المجال الكهربائي والتيار الكهربائي ($\vec{E}=\vec{j}=0$). نعتبر أن جسيماً شحنته q وكتلته m تتحرك من مبدأ الإحداثيات بسرعة $v_0 \ll c$ في الاتجاه الموجب للمحور x.

نريد أن نحسب مركبات حركة هذا الجسيم وفق محاور الإحداثيات تأخذ الصيغة:

$$x=\frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t \;,\; \boxed{y=\frac{v_0}{\omega_c}\cos\omega_c t} \;;\; t=0$$

علماً أن v_0 السرعة الابتدائية للجسيم وفق المحور x، و أن $\omega_c=\frac{qB}{m}$ التواتر الكلوديني، ما هو شكل مسار الجسيم؟

الحل: تعطى معادلة الحركة بالعلاقة:

$$\left[m\frac{d\vec{v}}{dt}=q\vec{v}\times\vec{B}\right] \quad -(1)$$

$$\vec{v}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ v_x & v_y & v_z\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}=Bv_y\vec{e}_x-Bv_x\vec{e}_y+0\vec{e}_z$$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$m\frac{d}{dt}\left[v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z\right]=qB\left(v_y\vec{e}_x-v_x\vec{e}_y+0\vec{e}_z\right)$$

بالمطابقة بين طرفي المعادلة (أشعة e_z, e_y, e_x)

$$\left[m\frac{dv_x}{dt}=qBv_y\ (1),\ m\frac{dv_y}{dt}=qBv_x\ (2),\ m\frac{dv_z}{dt}=0\ (3)\right]$$

نجد من المعادلة (3) من (2) أن:

$$\frac{dv_z}{dt}=0 \Rightarrow dv_z=0 \Rightarrow v_z=C_1$$

$$\text{or } v_z=v_z(0)$$

بما أن الجسيم تحرك في اللحظة $t=0$ بسرعة v_0 باتجاه المحور x وبالتالي $v_z(0)=0$

$$\Leftarrow \frac{dz_0}{dt}=0 \Leftarrow z_0=C_2 \text{ (ثابت)}$$

وحسب الشرط الابتدائي عندما $t=0$ تحرك الجسيم من مبدأ الإحداثيات لهذا يعني أن $z_0=0$

ويمكن وبسهولة إيجاد x, y من المعادلة. (1)، (2) في (3) نشتق المعادلة الأولى بالنسبة للزمن ونستفيد من المعادلة الثانية فنحصل على:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2}+\omega_c^2 v_x=0 \quad -(3)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة لمهتز توافقي بتردد ω_c يعطى حلّها العام بالصيغة التالية:

$$v_x=v_0\sin(\omega_c t+\theta_0) \quad -(4)$$

تعيين θ_0 من الشروط الابتدائية وفق المحور x والسرعة الابتدائية وفق y أي بينه

$$\tan\theta_0=\frac{v_x(0)}{v_y(0)} \quad v_y(0)\neq 0 \text{ وفق العلاقة } v_x(0)$$

ولتعيين $v_y(t)$ نستخرجها من (4) في المعادلة الأولى من (2):

$$m\frac{dv_x}{dt}=qBv_y$$

فنحصل على:

$$v_y=v_0\cos(\omega_c t+\theta_0) \quad -(5)$$

تعيين θ_0 عندما $t=0$ تحرك الجسيم من مبدأ الإحداثيات بسرعة v_0 باتجاه X أي أن:

$$t=0 \Rightarrow \left(v_x(0)=v_0\right),\left(v_y(0)=0\right)$$

نستخرج من $\tan\theta_0$

$$\tan\theta_0=\infty \Rightarrow \theta_0=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v_x=v_0\sin\left(\omega_c t+\frac{\pi}{2}\right)=v_0\cos\omega_c t \quad (6)$$

$$\Rightarrow v_y=v_0\cos\left(\omega_c t+\frac{\pi}{2}\right)=-v_0\sin\omega_c t$$

وبإجراء التكامل للمعادلة (6):

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t)=\frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t+X_0 \\ y(t)=\frac{v_0}{\omega_c}\cos\omega_c t+y_0 \end{cases} \quad (7)$$

الآن نريد تعيين X_0 و y_0 من الشروط الابتدائية عندما $t=0$

$$t=0 \Rightarrow x(0)=0 \Rightarrow 0=\frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c(0)+X_0 \Rightarrow \boxed{X_0=0}$$

$$t=0 \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow 0=\frac{v_0}{\omega_c}\cos\omega_c(0)+y_0 \Rightarrow y_0=-\left(\frac{v_0}{\omega_c}\right) \quad (8)$$

بالتعويض من (8) في (7) نحصل على المطلوب.

ب. أثبت أن:

$$\vec{E_\perp} = -\left(\frac{\vec{E_\perp} \times \vec{B}}{B^2}\right) \times \vec{B}$$

البلازما: وسط دائم

يتحرك جسيم مشحون تأثير مجالات كهربائية ومغناطيسية ثابتة ومنتظمة، تنطلق سرعة الجسيم بوساطة مبدأ مستقل عن نظام الإحداثيات بالصيغة التالية:

$$\vec{V}(t) = \vec{\omega_c} \times \vec{r_c} + \frac{\vec{E_\perp} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{q\vec{E_\parallel}}{m}t + \vec{v_\parallel}(0)$$

أ. ماذا يمثل كل حد من حدود العلاقة؟ هل تختلف سرعة انجراف الالكترونات عن سرعة انجراف الأيونات؟ علل ذلك.

يمثل الحد الأول: في الطرف اليميني الحركة الدائرية الكلترونية.

ويمثل الحد الثاني: السرعة الجرية (الانجرافية) لمركز التوجيه وهي عمودية على كل من $\vec{B}$ ، $\vec{E_\perp}$.

ويعبر الحد قبل الأخير عن تسارع ثابت لمركز التوجيه على اتجاه $\vec{B}$ أما الحد الأخير فيمثل السرعة الابتدائية (في اللحظة $t=0$) الموازية لـ $\vec{B}$ وتكون الحركة ثابتة للجسيم في المستوي العمودي لل $\vec{B}$ بشكل عام دائرية

- كلا لا تختلف.

للإلكترون و للأيون في البلازما نفس سرعة الانجراف، لا تعتمد هذه السرعة على كتلة الجسيم أو شحنته، لذلك فإن جميع الجسيمات المشحونة في البلازما تنجرف معاً بنفس السرعة (مقدار ثابت)

ا) السؤال ورد:

يخضع وسط بلازمي والى مجال مغناطيسي $\vec{B}$ ثابت ومتجانس، ولمجال كهربائي $\vec{E}$ متغير الزمن ومعمودي على $\vec{B}$. تطرح معادلة حركة الجسيم بالعلاقة: $M\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}\right) = q\vec{v}_p \times \vec{B}$

حيث m كتلة الجسيم، q شحنته.

أثبت أن سرعة الجسيم $\vec{v}_p$ في هذه الحالة تساوي إلى:

$$\vec{v}_p = \frac{m}{qB^2}\left(\frac{d\vec{E}_\perp}{dt}\right)$$

انطلاقاً من العلاقة:

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\right) = q\vec{v}_p \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p \times \vec{B} = \frac{m}{qB^2}\frac{\vec{a}}{dt}(\vec{E}_\perp \times \vec{B})$$

بضرب طرفي هذه العلاقة خارجياً من اليسار بالمتجه $\vec{B}$ يكون:

$$\vec{B}\times(\vec{v}_p\times\vec{B}) = \frac{m}{qB^2}\frac{d}{dt}\left[\vec{B}\times(\vec{E}_\perp\times\vec{B})\right]$$

باستخدام خواص الضرب المتجهي للعلاقة متجهات (قاعدة جيبس) فيجد:

$$\vec{v}_p(\vec{B}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{B}\cdot\vec{v}_p) =$$

$$\frac{m}{qB^2}\frac{d}{dt}\left[\vec{E}_\perp(\vec{B}\cdot\vec{B}) - \vec{E}_\perp(\vec{B}\cdot\vec{B}_\perp)\right]$$

$$\Rightarrow B^2\vec{v}_p = \frac{m}{qB^2}\frac{d}{dt}(B^2\vec{E}_\perp) = \frac{m}{qB^2}B^2\frac{d\vec{E}_\perp}{dt}$$

بما أن الحقل $\vec{B}$ لا يعتمد على الزمن (ثابت ومتجانس في الفضاء) فإن:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_p = \frac{m}{qB^2}\frac{d\vec{E}_\perp}{dt}}$$

ب - تتصرف البلازما عندما يتغير $\vec{E}$ مع الزمن كعازل مستقطب. علل ذلك.

تكون سرعة الانجراف $\vec{v}_p$ للجسيمات الموجبة بعكس جهة انجراف الجسيمات السالبة، وبالتالي يحدث استقطاب للوسط البلازمي، وتسمى $\vec{v}_p$ سرعة انجراف الاستقطاب.

---

15) إذا علمت أن تأثير المجال الكهربائي المتغير ببطء مع الزمن حسب العلاقة سرعة انجراف $\vec{v}_p = \frac{m}{qB^2}\left(\frac{\partial\vec{E}_\perp}{\partial t}\right)$

والمطلوب:

أ- هل تكون سرعة انجراف $\vec{v}_p$ للالكترونات والايونات في نفس الجهة؟ علل اجابتك، ماذا ستنتج؟

تكون سرعة الانجراف $\vec{v}_p$ للجسيمات الموجبة بعكس اتجاه هي للجسيمات السالبة، الأمر الذي يؤدي إلى انجراف الالكترونات في جهة والأيونات الموجبة بجهة معاكسة مما يؤدي إلى استقطاب البلازما.

ب- أثبت أن كثافة تيار الاستقطاب $\vec{j}_p = \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial\vec{E}_\perp}{\partial t}\right)$ تساوي إلى:

تعطى كثافة تيار الاستقطاب بالعلاقة:

$$\vec{j}_p = \frac{1}{V}\sum_i q_i\vec{v}_{p_i} = \left(\frac{1}{V}\sum_i m_i\right)\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial\vec{E}_\perp}{\partial t}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{\rho_m}{B^2}\left(\frac{\partial\vec{E}_\perp}{\partial t}\right)}$$

تكملة سؤال (15).

ج - باستفادة من معادلة ماكسويل الرابعة (قانون أمبير) ومن كون التيار الكلي في هذه الحالة يساوي

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_p = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{\rho_m}{B^2}\left(\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}\right)$$

استنتج أن ثابت العازلية الكهربائية الفعال للإلزما يساوي:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0\left(1 + \frac{\rho_m}{\varepsilon_0 B^2}\right)$$

الجواب: بفصل كثافة التيار الكلي $\vec{j}$ والتي قسمين كثافة تيار استقطاب $\vec{j}_p$ وكثافة تيار أخرى $\vec{j}_0$ ناتجة عن مصادر استقطاب أخرى

$$\vec{j} = \vec{j}_p + \vec{j}_0$$

بإضافة $\vec{j}_p$ إلى $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ التي أضافها ماكسويل إلى المعادلة رقم (4) من معادلاته والتي تمثل تيار الإزاحة نحصل على:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \vec{j}_p = \varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\rho_m}{B^2}\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0\left(1 + \frac{\rho_m}{\varepsilon_0 B}\right)\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

$$= \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t}$$

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0\left(1 + \frac{\rho_m}{\varepsilon_0 B^2}\right)$$

(د) هذا ما هو ثابت العازل الكهربائي الفعال للإلزما

ε_0 : ثابت العازل الكهربائي للفراغ

ε_r : ثابت العازل الكهربائي النسبي ويساوي $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ وليس له واحدة.

---

(16) يخضع جسيم مشحون داخل مجال مغناطيسي $\vec{B}$ ثابت ومنتظم، ومجال كهربائي $\vec{E}$ متغير بشكل كيفي مع الزمن $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-iwt}$

وإذا علمت أن: $\vec{v} = \vec{v}_m + \vec{v}_e e^{-iwt}$

أثبت باستخدام قانون قوة لورنتز أن:

$$m\frac{d\vec{v}_m}{dt} = q\vec{v}_m \times \vec{B}$$

$$-iwm\vec{v}_e = q\left[\vec{E}_0 + \vec{v}_e \times \vec{B}\right]$$

نستخدم المعطيات: $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-iwt}$ ... (1)

في معادلة الحركة (قوة لورنتز) نحصل على:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left[E_0 e^{-iwt} + \vec{v} \times \vec{B}\right] \quad \text{... (2)}$$

يمكن تمثيل متجه السرعة بالمركبتين:

$$\left[\vec{v} = \vec{v}_m + \vec{v}_e e^{-iwt}\right] \quad \text{... (3)}$$

بالتعويض من (3) في (2) نجد لدينا:

$$m\frac{d\vec{v}_m}{dt} - iwm\vec{v}_e e^{-iwt} = q\left[\vec{E}_0 e^{-iwt} + \vec{v}_m \times \vec{B} + \vec{v}_e \times \vec{B} e^{-iwt}\right] \quad \text{... (4)}$$

يمكن فصل المعادلة (4) إلى معادلتين واحدة تتضمن السرعة $\vec{v}_m$ المرتبطة بالمجال المغناطيسي وفقاً لما يلي:

$$m\frac{d\vec{v}_m}{dt} = q\vec{v}_m \times \vec{B} \quad \text{... (5)}$$

والمعادلة الثانية تتعلق بالمجال الكهربائي أي أن:

$$-iwm\vec{v}_e e^{-iwt} = q\left[\vec{E}_0 e^{-iwt} + \vec{v}_e \times \vec{B} e^{-iwt}\right]$$

$$-iwm\vec{v}_e = q\left[\vec{E}_0 + \vec{v}_e \times \vec{B}\right] \quad \text{... (6)}$$

وهما المطلوبتان.

تمثل المعادلة (5) الحركة الدائرية المنتظمة للجسيم حيث خطوط المجال المغناطيسي عند تردد السكلترون w_c.

١٧) يخضع جسيم مشحون لمجال مغناطيسي ثابت ومنتظم ومجال كهربائي متغير بشكل جيبي مع الزمن (الحركة مستقيمة دائرياً حول $\vec{B}$). تحقق معادلة حركة الجسيم بالصيغتين:

مستقيمة يميناً $\vec{v}_R = i\left(\frac{q}{m}\right)\frac{1}{(\omega \pm \Omega_c)}\vec{E}_{oR}$

مستقيمة يساراً $\vec{v}_L = i\left(\frac{q}{m}\right)\frac{1}{(\omega \pm \Omega_c)}\vec{E}_{oL}$

حيث تشير الإشارة العليا لجسيم موجب الشحنة، وتشير الإشارة السفلى لجسيم سالب الشحنة.

أ. متى يحدث التجاوب بين اهتزاز المجال الكهربائي الموجب وبين التردد السكلوتروني للجسيم؟ ومن أجل أي مركبة مستقيمة يحدث التجاوب للإلكترون وللأيون؟ علل ذلك؟

يحدث التجاوب بين اهتزاز الحقل الكهربائي ω والتردد السكلوتروني ω_c عندما $\omega \to \Omega_c$. ويتحقق التجاوب من أجل الإلكترون في المركبة المستقيمة يساراً حيث:

$$\omega \to \Omega_c = -\frac{qB}{m} \Rightarrow \vec{v}_R \to \infty$$

ويحدث التجاوب بالنسبة للأيون الموجب من أجل مركبة السرعة المستقيمة يميناً للحقل الكهربائي

$$\omega \to \Omega_c = \frac{qB}{m} \Rightarrow \vec{v}_L \to \infty$$

ب - إذا أمكن التعبير عن الحركة المستقيمة للجسيم في المستوي

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}_m + \frac{q}{m}\vec{E}_{oR}\, t + e^{-i\omega t} \quad for\ q<0$$

$$\vec{v}_\perp = \vec{v}_m + \frac{q}{m}\vec{E}_{oL}\, t + e^{-i\omega_c t} \quad for\ q>0$$

(XV) على الشكل:

كيف تتغير سرعة الجسيم مع مرور الزمن؟ ما خصوصية الجسيم في هذه الحالة؟ وضح ذلك بالرسم، ما هي الفائدة من هذه الظاهرة التي تحقق في البلازما في هذه الحالة؟

تزداد سرعة الجسيم مع ازدياد الزمن t وإلى أجل غير مسمى ويتحرك الجسيم مساراً على شكل دوائر أنصاف أقطارها متزايدة باستمرار مع تزايد الزمن وبالتالي مع زيادة سرعته بشكل مستمر خلال هذه الحركة الكترونية وبشكل حلزوني طاقة الحقل الكهربائي.

يمكن الاستفادة من هذه الظاهرة كطريقة لزيادة سرعة الجسيمات وبالتالي زيادة درجة الحرارة الحركية للبلازما من خلال زيادة تصادم الجسيمات فترة هذه الطريقة باسم تسخين التردد الالامحلي (الراديوي) للبلازما بوساطة التجاوب (الرنين السيكلوتروني).

18. يُعرف تابع التوزيع في فضاء الطور بالصيغة $f_\alpha(\vec{r},\vec{c},t) = \frac{d^6N_\alpha(\vec{r},\vec{c},t)}{d^3r\,d^3c}$

أ. عرف الكثافة العددية $n_\alpha(\vec{r},t)$ المترافقة $n_\alpha(\vec{r},t)$ وأوصل العلاقة التي تعطي $n_\alpha(\vec{r},t)$ بدلالة تابع التوزيع.

تعتبر كثافة العدد $n_\alpha(\vec{r},t)$ مقدار فيزيائي معين في فضاء التشكيل الذي تمثل هذه الجسيمات.

هو عدد الجسيمات من النوع α لكل وحدة حجم وبعض النظر عن السرعة ويمكن الحصول على كثافة العدد وبكامله $d^6N_\alpha(\vec{r},\vec{c},t)$ على كامل فضاء السرعة وتقسم النتيجة على عنصر الحجم d^3r لفضاء التشكيل أي أن $n_\alpha(\vec{r},t)$:

$$n_\alpha(\vec{r},t) = \frac{1}{d^3r}\int_{\vec{c}} d^6N_\alpha(\vec{r},\vec{c},t) \quad \text{--- (1)}$$

أو باستخدام علاقة تابع التوزيع؛ يكون:

$$n_\alpha(\vec{r},t) = \int_{\vec{c}} f_\alpha(\vec{r},\vec{c},t)\,d^3c \quad \text{--- (2)}$$

تمثل إشارة التكامل المزدوج المشار إليه في العلاقة (2) في الواقع تكاملاً ثلاثياً يمتد على كامل فضاء السرعة أي على كل متغير من المتغيرات c_x، c_y، c_z ولكل من $-\infty$ إلى $+\infty$.

ب. عرف $\vec{u}_\alpha(\vec{r},t)$ متوسط سرعة الجسيمات، واذكر مراحل الحصول عليها مع كتابة الصيغة الرياضية بدلالة تابع التوزيع.

تعرف متوسط السرعة $\vec{u}_\alpha(\vec{r},t)$ أنها سرعة التدفق الجهرية للجسيمات من النوع α في جوار نقطة الموضع $\vec{r}$ في اللحظة t.

ومن أجل ربط $\vec{u}_\alpha(\vec{r},t)$ مع تابع التوزيع نفترض أن الجسيمات من النوع α الموجودة في عنصر الحجم $d^3r\,d^3c$ حول $(\vec{r},\vec{c})$ في اللحظة t والتي أشرنا إلى عددها بواسطة $d^6N_\alpha(\vec{r},\vec{c},t)$.

يمكن الحصول على متوسط سرعة الجسيمات من النوع α باتباع المراحل (الخطوات) الآتية:

أولاً: نضرب $d^6N_\alpha(\vec{r},\vec{c},t)$ في سرعة الجسيم $\vec{c}$.

ثانياً: تكامل على جميع السرعات الممكنة.

ثالثاً: نقسم النتيجة على العدد الكلي للجسيمات من النوع α الموجودة في d^3r بغض النظر عن السرعة أي أن السرعة المتوسطة:

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r},t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r},t)\,d^3r}\int_{\vec{c}} \vec{c}\,d^6N_\alpha(\vec{r},\vec{c},t) \quad \text{--- (3)}$$

باستخدام تابع التوزيع نحصل على السرعة المتوسطة بالصيغة الآتية:

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r},t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r},t)}\int_{\vec{c}} \vec{c}\,f_\alpha(\vec{r},\vec{c},t)\,d^3c \quad \text{--- (4)}$$

نلاحظ من (2) و(4) أن كلاً من $n_\alpha(\vec{r},t)$ و $\vec{u}_\alpha(\vec{r},t)$ يعتمدان على الإحداثيات $\vec{r}$ والزمن t.

19 الحل :

أ.

$$\vec{r}'(t+dt) = \vec{r}(t) + \vec{v}\,dt$$
$$\vec{v}'(t+dt) = \vec{v}(t) + \vec{a}\,.\,dt$$

ب. بما أننا نأخذ بعين الاعتبار نفس الجسيمات عند t وعند $t+dt$ يكون :

$$f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t+dt)\, d^3r'\, d^3v' = f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)\, d^3r\, d^3v$$

ت. تعطى العلاقة بين عنصر الحجم الجديد وعنصر الحجم الابتدائي بالصيغة :

$$d^3r'\, d^3v' = |J|\, d^3r\, d^3v$$

ث. عندما يكون المحدد الجاكوبي $|J| = 1$ فإن : $d^3r'\, d^3v' = d^3r\, d^3v$

ويكون أيضاً في هذه الحالة :

$$\left[f_\alpha(\vec{r}', \vec{v}', t+dt) - f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)\right] d^3r\, d^3v = 0$$

ج- الجواب : محاضرة أضيرة (11) استنتاج dx^2 و dx^3 .

ح- باستخدام المؤثر التالي : $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} + \vec{a}\,\vec{\nabla}_v$ (المشتق الكلي بالنسبة للزمن في فضاء الطور)

اكتب معادلة بولتزمان السابقة (في الطلب ج). ماذا تستنتج ؟

$$\frac{DF_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{Dt} = 0$$

تعبر العادلة عن حفظ الكثافة للنقاط والجسيمات الممثلة في فضاء الطور، أي أن هذه الكثافة تبقى ثابتة مع التغير الزمني وتقرن هذه النتيجة بنظرية ليوفيل .

يمكن ملاحظة أن هذه النتيجة تنطبق فقط على الحالات الخاصة التي يكون فيها اصطدام الجسيمات وتشتتها مهملين .

مثال ومسألة:

احسب الفيزياء الفضائي (طول ديباي) λ_D والزمان τ والتردد f_{pe}، واحسب عدد الالكترونات N_D في كرة ديباي في غازشاني درجة حرارة الالكترونات فيه: $T_e = 3\times10^4\ K$ وكثافة الالكترونات $n_e = 10^{18}\ m^{-3}$ وباهمال تأثير الشحنات الخارجية واعتبار الغاز الثنائي بمنزلة بلازما.

ملاحظة: تعطى الثوابت في الحلة الدولية بالشكل التالي:

$m_e = 9.1\times10^{-31}\ kg$, $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ F.m^{-1}$

$e = 1.6\times10^{-19}\ C$, $K_0 = 1.38\times10^{-23}\ J.K^{-1}$

الحل: طول ديباي:

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 K_0 T}{e^2 n}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{8.85\times10^{-12}\times1.38\times10^{-23}\times3\times10^4}{(1.6\times10^{-19})^2\times10^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 4\times10^{-6}\ m$$

لحساب τ، f_{pe} نسبة إلى ω_{pe} نجد:

$$\omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{(1.6\times10^{-19})^2\times10^{18}}{8.85\times10^{-12}\times9.1\times10^{-31}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 18\times10^{10}\ Hz$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_{pe}} = 0.35\times10^{-10}\ sec$$

$$f_{pe} = \frac{1}{\tau} = 2.86\times10^{10}\ Hz$$

$$\Rightarrow N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e$$

$$= \frac{4}{3}\pi\ (4\times10^{-6})^3\times10^{18} \approx 2245$$

جسيمة.