كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : فيزياء البلازما

المحاضرة : السابعة/**نظري**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

* دراسة حركة جسيم مشحون في مجال كهربائي ساكن ومنتظم $(\vec{B}=0, \vec{E}\neq 0)$

charged particle Motion in uniform Electrostatic field

يوجد $(\vec{B}=0, \vec{E}\neq 0)$ بالعلاقة:

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\, dt$$

بما أن $\vec{E}$ ثابت بالنسبة للزمن فإنه يمكن المكاملة بسهولة فنحصل على:

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\,t + v_0 \quad (2)$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية نحصل على علاقة لحركة موضع الجسيم كتابع للزمن

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (3)$$

حيث r_0 هو الموضع الابتدائي للجسيم، v_0 السرعة الابتدائية للجسيم

نستنتج أن الجسيم الخاضع لمجال كهروستاتيكي منتظم يتحرك بتسارع ثابت ويكون هذا التسارع باتجاه المجال $\vec{E}$ إذا كانت الشحنة موجبة وعكس اتجاه $\vec{E}$ إذا كانت الشحنة سالبة ولا يوجد تسارع للجسيم في الاتجاه العمودي على E وتبقى حركة الجسيم دون تغير في هذا المجال.

* دراسة حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي ثابت ومنتظم $(\vec{B}\neq 0, \vec{E}=0)$

charged particle Motion in uniform magneto-static filed

نفرض أن جسيماً مشحوناً بشحنة q وأن كتلته m يتحرك بسرعة $\vec{v}$ في مجال مغناطيسي ثابت ومنتظم وأن $\vec{E}=0$، تعطى عندئذ معادلة حركة هذا الجسيم بالعلاقة

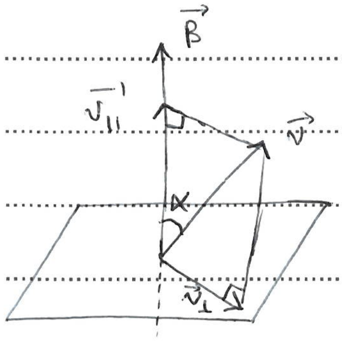
$$\vec F = q\vec v \wedge \vec B$$

$$m\frac{d\vec v}{dt} = q\vec v \times \vec B \qquad (4)$$

يكون من الملائم في هذه الحالة تحليل متجه السرعة $\vec v$ إلى مركبتين

* مركبة موازية للحقل $\vec B$: $\vec v_{\parallel}$
* ومركبة أخرى متعامدة للحقل $\vec B$: $\vec v_{\perp}$ وذلك كما في الشكل التالي

$$\vec v = \vec v_{\parallel} + \vec v_{\perp} \qquad (5)$$



بالتعويض من (5) في (4)

ومعرفة أن $\vec v_{\parallel} \times \vec B = 0$

نحصل على

$$\frac{d\vec v_{\perp}}{dt} + \frac{d\vec v_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{m}\vec v_{\perp} \times \vec B \qquad (6)$$

بما أن الحد الناتج عن $\vec v_{\perp} \times \vec B$ هو متجه عمودي على $\vec B$ فإن:

$$\frac{d\vec v_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (7) \qquad , \qquad \frac{d\vec v_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\vec v_{\perp} \times \vec B \quad (8)$$

ينتج من المعادلة (7) أن $\vec v_{\parallel} = \vec v_{\parallel}(0)$

أي أن سرعة الجسيم باتجاه الحقل $\vec B$ لا تتغير وتساوي إلى سرعة الجسيم الابتدائية

أما من أجل حركة الجسيم وفق المستوي العمودي على $\vec B$ فيمكننا كتابة المعادلة (8) بالصيغة التالية

$$\frac{d\vec v_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}(\vec v_{\perp} \times \vec B) = -\frac{q}{m}(\vec B \times \vec v_{\perp})$$

$$= \vec\omega_c \times \vec v_{\perp} \qquad (9)$$

حيث ω_c : $\omega_c = -\frac{q\vec B}{m}$

وحيث أن $\vec{\omega_c}$ متجه يعين بالصيغة:

$$\vec{\omega_c} = -\frac{q\vec{B}}{m} = \frac{|q|\,B}{m}\,\hat{\omega}_c$$

حيث $\hat{\omega}_c$ متجه واحدة موجه باتجاه $\vec{B}$ من أجل الجسيم السالب وعكس جهة $\vec{B}$ من أجل $q>0$ (موجب)

ملاحظة:

أ) دائماً وأبداً قيمة $\hat{\omega}_c$ هي مقدار موجب $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$

ب) بما أن ω_c متجه ثابت ينتج من ضرب المعادلة ⑨ سلمياً بـ $\vec{V_\perp}$:

$$\frac{d\vec{V_\perp}}{dt} \cdot \vec{V_\perp} = (\vec{\omega_c} \times \vec{V_\perp})\cdot\vec{V_\perp} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{\omega}\,t\right)^2 = 0 \Rightarrow \vec{V_\perp} = \vec{c}$$

وبالتالي ينتج من المعادلة ⑨ أن تسارع الجسيم يكون ثابتاً لأن مشتق السرعة هو (0)

وبالتالي فإن هذا التسارع يوافق حركة دورانية لمتجه السرعة في المستوي العمودي على كل من $\vec{B}$ وبسرعة زاوية $\vec{\omega_c}$ ويمكننا مباشرة مكاملة المعادلة ⑨ مع اعتبار أن V_c ثابت وذلك باعتبار أن $V_\perp = \frac{dr_c}{dt}$

$$\vec{V_\perp} = \vec{\omega_c} \times \vec{r_c} \quad (11)$$

حيث $\vec{r_c}$ يدل على موضع الجسيم بالنسبة للنقطة G مركز الدوران في المستوي العمودي على $\vec{P}$

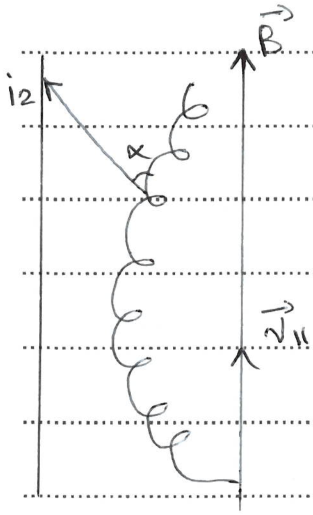
وبما أن $\vec{V_\perp}$ سرعة الجسيم ثابتة و $\vec{\omega_c}$ ثابت أيضاً، r_c ثابتة

فإن قيمة متجه موضع الجسيم $\vec{r_c}$ أيضاً مقدار ثابت لذلك فإن المعادلة (11) تبين أن السرعة $\vec{V_\perp}$ توافق دوران متجه الموضع $\vec{r_c}$ حول النقطة G

في المستوي العمودي على $\vec{B}$ بسرعة زاوية ω_c

بالنتيجة :

يكون مسار الجسيم مؤلف من تركيب حركتين، حركة منتظمة على طول المتجه $\vec{B}$ بسرعة ثابتة $\vec{v}_{\parallel}$ وحركة دائرية في المستوي العمودي على $\vec{B}$ بسرعة ثابتة أيضاً



لذلك فإن الجسيم يوصف بحركة حلزونية .

تدعى الزاوية بين $\vec{B}_1$ و $\vec{v}$ الزاوية α أي أن

$$\alpha = \sin^{-1}(dx) \quad (*)$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\vec{v}_{\parallel}}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\perp}}{v_0}\right) \quad (12)$$

حيث v السرعة الكلية وتساوي إلى $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$

لدينا الحالات الخاصة:

a) عندما $v_{\parallel} = 0$ و $v_{\perp} = 0 \neq \alpha = \frac{\pi}{2}$

b) عندما $v_{\parallel} \neq 0$ و $v_{\perp} = 0 \Leftarrow \alpha = 0$

والجسيم يتحرك حركة دائرية في المستوي العمودي على $\vec{B}$

$\alpha = 0 \Leftarrow$ يتحرك الجسيم على طول المتجه $\vec{B}$ بسرعة $v_{\parallel}$

نعلم أن :

أ) قيمة السرعة الزاوية $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$

ب) نصف قطر الدوران $r_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{m v_{\perp}}{|q| B}$

ثم بضرب طرفي العلاقة أعلاه مباشرة في B نحصل على

$$r_c B = \frac{m v_\perp B}{|q| B} = \frac{P_\perp}{P_\parallel}$$

تسمى هذه النسبة (القساوة) الصلابة المغناطيسية في البلازما

مثال:

يطبق في مجال المغناطيسية $\vec{B}(0,0,B)$ ثابت ومنتظم في منطقة محدودة من الفراغ خالية من الحقل والتيار الكهربائي $(E=J=0)$ نفرض أن جسيماً شحنته q وكتلته m يتحرك من مبدأ الإحداثيات في اللحظة $t=0$ بسرعة $v_0 \ll c$ في الاتجاه الموجب للمحور x برهن أن مركبات مسار حركة هذا الجسيم وفق محاور الإحداثيات تعطى بالصيغ التالية:

$$x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \;, \; y = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \;, \; z = 0$$

حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للجسيم وفق المحور x وأن $\omega_c = \frac{qB}{m}$ التردد السيكلتروني، ما هو شكل مسار هذا الجسيم

تعطى معادلة حركة هذا الجسيم في هذه الحالة بالصيغة $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ①

نحسب أولاً $\Leftarrow \vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (v_y B)\vec{e_x} - (v_x B)\vec{e_y} + 0\vec{e_z}$$

بالتعويض في ① ينتج:

$$m\frac{d}{dt}(v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z}) = q(B v_y e_x - B_x v \vec{e_y} + 0\vec{e_z})$$

ينتج من المطابقة بين أمثال $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ بين الطرفين ينتج

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \;,\; \frac{dv_y}{dt} = -q\frac{B}{m} v_x \;,\; \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad ②$$

نعوض (3) في (2) $\frac{dv_z}{dt}=0 \Rightarrow dv_z=0 \Rightarrow v_z=c$

نعين الثوابت من الشروط الأولية:

$t=0 , v_z=0 \Rightarrow v_z(0)=0$

كما أن $z(0)=0$

نوجد x, y من المعادلة الأولى والثانية في (2) كما يلي:

نشتق المعادلة الأولى في (2) بالنسبة للزمن ونستفيد من المعادلة الثانية

في (2) $\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega_c \frac{d v_x}{dt}$

$\Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega_c(-\omega_c v_x) \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0$ (3)

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية لهزاز توافقي تردد ... بالشكل التالي

$v_x(t) = v_0 \sin(\omega_c + \theta_0)$

حيث θ_0 ثابت تكامل يعتمد على العلاقة بين السرعة الابتدائية بين المحور x والمحور y

وفق العلاقة $\tan\theta_0 = \frac{v_x(0)}{v_y(0)}$

ولإيجاد $v_y(t)$ نعوض (4) في المعادلة الأولى من (2) نحصل على

$v_0 \omega_c \cos(\omega_c t + \theta_0) = \omega_c v_y$

$\Rightarrow v_y = v_0 \cos(\omega_c t + \theta_0)$

نعين θ_0 من الشروط الابتدائية التي هي

تحرك الجسم في اللحظة $t=0$ من مبدأ الإحداثيات في

أن $t=0 \Leftarrow$ $v_x(0)=v_0 , v_y(0)=0 , v_z(0)=0$

$\Rightarrow \tan\theta_0 = \frac{v_0}{0} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow v_x(t) = v_0 \sin(\omega_c t + \tfrac{\pi}{2}) = v_0 \cos\omega_c t \\ &v_y(t) = v_0 \cos(\omega_c t + \tfrac{\pi}{2}) = -v_0 \sin\omega_c t \end{aligned}\right\} (6)$$

لإيجاد شكل المسار نكامل المعادلتين في (6)

$$x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin\omega_c t + x_0$$
$$y = \frac{v_0}{\omega_c} \cos\omega_c t + y_0$$
(7)

تعيين ثابتا التكامل

$$t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0 = \frac{v_0}{\omega_c} \sin 0 + x_0 \Rightarrow x_0 = 0$$
$$t=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = \frac{v_0}{\omega_c} \cos 0 + y_0 \Rightarrow y_0 = -\frac{v_0}{\omega_c}$$

بالتعويض في (7)

$$x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin\omega_c t$$
$$y = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos\omega_c t - 1)$$
$$z = 0$$
(8)

انتهت المحاضرة