كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

المادة : ميكانيك الكم٢

المحاضرة : السادسة/نظري/ كتابة

الصيغة الحالية لمعادلة ديراك

لنكتب معادلة ديراك بشكل متناظر بالنسبة للاحداثيات والزمن ولهذه الفرضيات نفرض الاحداثيات الرباعية

$X_\mu = (X_i , i c t)$ $\quad\quad$ $\gamma_\mu = (\gamma_i , \gamma_\mu)$

التي يعبر عنها بدلالة المصفوفات α_i , β من خلال العلاقات

$$\gamma_i = \frac{\beta}{i}\alpha = -i\beta\alpha_i = i\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$\gamma_4 = \beta = \rho_3 = \alpha_0$

ثم إن حقيقة كون المصفوفات اكبر يدة γ_μ

(34) هرميتية تحقق العلاقات $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$

حيث $\mu\nu$

تأخذ قيم $1, 2, 3, 4$

نفرض ان $\hbar = c = 1$

يفرض ان

في هذه الحالة نكتب معادلة ديراك بالشكل التالي

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\nabla - \beta m_0\right)\psi = 0 \quad (35)$$

من العلاقة (35) نضرب طرفيها (β-)

$$\left(\frac{\beta}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\beta}{i}\alpha_i\nabla+\beta^2 m_0\right)\psi=0 \qquad (36)$$

بالاستفادة من جملة العلاقات (33)

$$\left(\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}+\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+m_0\right)\psi=0 \qquad (37)$$

((توضيح))

$\beta=\rho_3 \Rightarrow$ بالتربيع $=1$

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m_0\right)\psi=0 \qquad (38)$$

بإدخال الرمز

$\hat{P}=\gamma_\mu P_\mu$ إلى (38)

$$\left(i\hat{P}+m_0\right)\psi=0 \qquad (39)$$

$P_\mu=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\hbar=1$

$P_\mu=-i\frac{\partial}{\partial}$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}=iP_\mu \Rightarrow i\frac{P}{\gamma_\mu}$$

نعوض بـ (38)

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m_0\right)\psi=0$$

$$\left(\cancel{\gamma_\mu}\left(i\frac{\hat{P}}{\cancel{\gamma_\mu}}\right)+m_0\right)\psi=0 \Rightarrow$$

$$\left(i\hat{P}+m_0\right)\psi=0 \qquad (39)$$

تمثل العلاقة (39) الصيغة المكافئة لمعادلة ديراك

وتأخذ المعادلة المرافقة لمعادلة ديراك

$\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma$ و $\bar{\psi}(-i\hat{p} + m_0) = 0$ (40)

يمثل $\bar{\psi}$ تابع ديراك المرافق

// ملاحظة //

يمكن لمعادلات ديراك أن تأخذ شكلاً آخر باستخدام

مقياس نايمان

$$x_\mu = (x_0, \vec{x})$$

تصبح معادلة ديراك

$$(\hat{p} - m_0)\psi = 0 \qquad (41)$$

حيث $\gamma_0 = \beta$

$\gamma_n = \beta\alpha_n$

$$\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu \qquad p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$\gamma_0 = \gamma_0^{+}$$

$$(\gamma_n^{F})^{+} = -\gamma_n^{f}$$

وبالتالي تأخذ عبارتا كثافة الشحنة الكهربائية والتيار

الكهربائي بالشكل التالي

$$\rho = e\psi^{+}\psi = e\bar{\psi}\gamma_4\psi$$
$$\vec{J} = ce\psi^{+}\alpha_i\psi = ice\bar{\psi}\gamma_i\psi \qquad (42)$$

يمكن دمج العلاقتين (42) بعلاقة واحدة

$$J_\mu = (J_i, ic\rho) = ic\rho\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

وبالتالي الاستمرار (الحفاظ الشحنة) تأخذ بالشكل التالي

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

ملاحظات عن خصائص المصفوفات :

تحقق المصفوفات γ_μ

$$\gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

بإحداثيات القياس

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2 g_{\mu\nu}$$

هذه المصفوفات غير تبديلية ومربع كل منها إما I^+ أو I^-

وبالتالي فإن جداء أي عدد منها يعطي احدى المصفوفات الست عشر المنتمية الى (5) أصناف

Pseudos-scalar	(شبه سلمي)	P
Axial	(محوري)	A
Tensor	(تنسوري)	T
Vector	(متجهي)	V
scalar	(سلمي)	S

المصفوفة

$$\gamma_5 = i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0$$

وهي مصفوفة غير تبديلية مع المصفوفة μ

$$\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0$$ 45

فمربعها $(\gamma_5)^2 = +1$ (46)

مقلوب $(\gamma_5)^{-1} = (i\, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0)^{-1}$

$-i(\gamma_0 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1)$ (47)

أثر المصفوفة (Trace)

كيد مجموع العناصر القطرية ماسيمك أثر المصفوفة ويعرف بالمساواة التالية

$$Tr\,\gamma_A = \begin{cases} 4 & \text{ف} \quad \gamma_A = I \\ 0 & \text{ف} \quad \gamma_A = I \end{cases}$$

مؤثر الاستقطابية :

يمكننا تمييز قيم فيزيائية مرتبطة بوجود سبين الجسيم تدعى بالاستقطابية أو بالكلزونة

رهي اتجاه الحركة الدورانية للجسيم حول نفسه بالنسبة لاتجاه اندفاعه

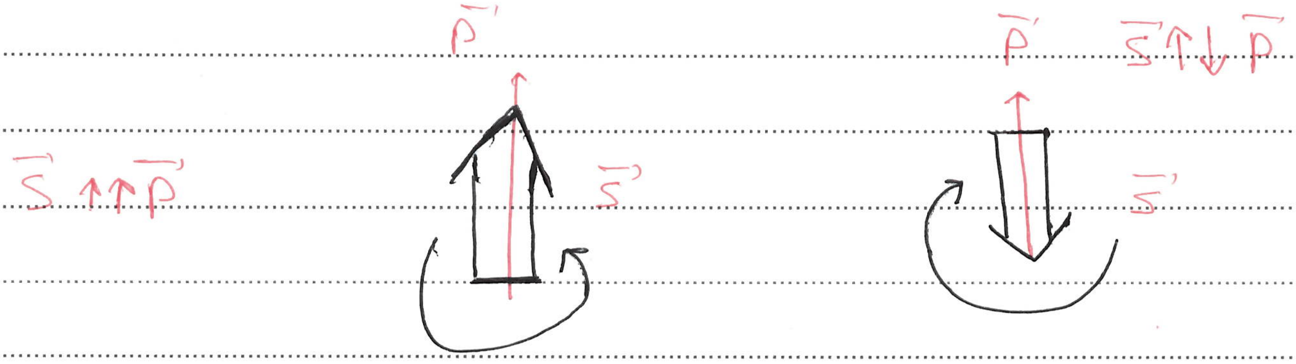
نعرف مؤثر بالاستقطابية بالعلاقة التالية

$$\Lambda_S = \hat{S} \, \frac{\hat{P}}{|P|} \quad (48)$$

تعرف الاستقطابية بوضوح من مسقط السبين على حركة e كما هو مبين بالشكل التالي حيث يمثل الشكل a الاستقطاب الموجب له اليميني $S_P = +1$

أما الشكل $\vec{p}'$ فـ يمثل الاستقطاب السالب اليساري للالكترون

$S_{L} = -1$



(a) $S_R = +1$ (b) $S_L = -1$

$\vec{p}'(0, 0, p_z')$

$$\hat{\Lambda}_s = \hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar\,\Sigma_z = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad (49)$$

اذا وجهنا الـ e وفق المحور oz وعليه يكون

اي ان قيم الخاصة للمؤثر Λ_s تساوي $\pm\frac{1}{2}\hbar$

والتوابع الخاصة الموافقة Λ_s هي

$$\begin{pmatrix}u_1\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u_{-1}\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\ u_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\ u_{-1}\end{pmatrix} \qquad (50)$$

حيث يوافق التابع u_1 الحالة

$\vec{S}\uparrow\uparrow\vec{p}$

الاستقطاب اليميني

أما الاستقطاب U_{-1} توافق مركبة الاستقطاب اليساري

$$U_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad U_{-1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

الملاحظة!!

القيم الخاصة لمؤثر يعطى على شكل مصفوفة قطرية تتطابق مع القيم الخاصة لعناصر القطر

<< مبادئ التكميم الثاني >>

عند دراسة الجسيمات في ميكانيك الكم يجب دراسة معادلة شرودنغر ومن ثم إيجاد ملحاوصاب التوابع الموجية الخاصة والطاقة ويبدو ان إنجاز هذه العملية كافٍ لمعرفة كل فيزياء الجسيمات المدروسة في إطار ميكانيك الكم اللانسبي وتصبح الدراسة أكثر تعقيداً عندما يتعلق الأمر بعدد كبير من الجسيمات مما يستدعي طريقة أخرى ~~الأهم~~ لمعالجة الأمر وهذه الطريقة تتمثل في التكميم الثاني ونشير هنا ان التكميم الأول يستخدم لدراسة حالة جسيم واحد حيث نعتبر ان السعة مقدار ثابت ومن المعلوم ان حل معادلة شرودنغر يكون

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} = \sum_n C_n(t)\, \psi_n(\vec{r}) \qquad (1)$$

$$C_n(t) = C_n\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

مع العلم أن كلاً من

$L_{nl}(r)$ و C_n

لا تتعلقان بالزمن

كما نلاحظ أن السعة ثابتة وبالتالي كل من حد التكميم الأول نشير إلى أن التكميم الأول يجب أن يصف جملة مكونة من عدد متغير من الكميات وبالتالي السعة المتعلقة بالتابع الموجي الذي هو بدوره حل لمعادلة شرودينغر !! يجب أن تكون عبارة عن مؤثر يتبع الزمن وليس مقدار ثابت ومن أجل توضيح مفهوم عملية التكميم الثاني نطبق المؤثرات لحساب الطاقة E_n

// انتهت المحاضرة //

// A To Z //