كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

المادة : ميكانيك الكم٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/ كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المادة: ميكانيك الكم (2) — المحاضرة: الخامسة

الدكتورة: سمر عمران — التاريخ:

السنة: الرابعة — الاختصاص: فيزياء

$i = 1, 2, 3$ ؛

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_i' & 0 \\ 0' & \alpha_i' \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0' & I' \\ I' & 0' \end{pmatrix} \qquad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0' & -iI' \\ +iI' & 0' \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} I' & 0' \\ 0' & -I' \end{pmatrix}$$

حيث α_i' هي مصفوفات بادلي ثنائية العياس

$$0' = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I' = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تحقق هذه المصفوفات α_i و β_i العلاقات التي يحققها مصفوفات بادلي

$$\alpha_i^2 = \beta_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i\alpha_j &= -\alpha_j\alpha_i = i\alpha_k \\ \beta_i\beta_j &= -\beta_j\beta_i = i\beta_k\end{aligned}\right\} \text{ و } (i,j,k) = (1,2,3)$$

بصورة مختصرة

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \beta_i\beta_j + \beta_j\beta_i = 2\delta_{ij}$$

أضافت الى ماسبق عرف ديراك المصفوفات α_i كما يلي

$$\alpha_i = \beta_i\alpha_i = \begin{pmatrix} 0' & \alpha_i' \\ \alpha_i' & 0' \end{pmatrix} \qquad i = 1,2,3 \text{ و}$$

$$\alpha_0 = \beta_3 = \begin{pmatrix} I' & 0' \\ 0' & -I' \end{pmatrix} = \beta \qquad (9.1)$$

اضافت الى ذلك يمكننا بسهولة التحقق من العلاقات التالية التي حققها α_i

$$\alpha_i^2 = \beta_i^2\alpha_i^2 = \mathbb{I}$$

$$\alpha_1^2 = \beta_1^2\alpha_1^2 = I \qquad \alpha_0^2 = \beta_3^2 = I$$

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = \beta_1^2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2)$$

$$\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0 = \alpha_1(\beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

يمكننا كتابة مصفوفات ديراك بالشكل

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تابع ديراك دراسة المعادلة الموجية النسبية الكافئة لمعادلة شرودينغر

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \qquad \ldots\ldots (10)$$

والتي تحدد كثافة احتمال

$$\rho = \psi^* \psi$$

ولنكتب معادلة ديراك كالتالي

$$(\hat{E} - \hat{H}_D)\psi = 0 \qquad \ldots\ldots (11)$$

حيث يعامل المؤثران H_D و E العبارتين

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad H_D = c\alpha_n \hat{p}_n + \beta_3 m_0 c^2 \qquad \ldots (12)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عند وجود حقل كهرطيس خارجي

وعطى بالكمونين $(\phi, \vec{A})$ يأخذ المؤثران السابقان الصيغتين التاليتين

$$\hat{F} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi$$

$$\hat{P} = -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} A$$

... (13)

وبالتالي تؤول المعادلة ديراك

بوجود حقل كهرطيس خارجي إلى الصيغة التالية

$$\left[\hat{F} - c(\alpha_n \hat{P}_n) - \beta_3 m_0 c^2 \right] \psi = 0$$

... (14)

اختار ديراك التابع الموجي ψ على شكل عامود مؤلف من ψ عناصر وذلك التناسب بعدد الأبعاد والأعمدة في مصفوفات ديراك

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^* = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \psi_3^* \ \psi_4^*)$$

فرافق التابع الموجي ψ الحصول على الشكل المصفوفي من العلاقة (14) باستبدال قيم المصفوفات $\alpha_n \beta_3$ ذات (4) أعمدة حيث كد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{pmatrix} (F-m_0c^2) & 0 & -cp_z & -c(p_x-ip_y) \\ 0 & (F-m_0c^2) & -c(p_x+ip_y) & cp_z \\ -cp_z & -c(p_x-ip_y) & (F+m_0c^2) & 0 \\ -c(p_x+ip_y) & cp_z & 0 & (F+m_0c^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4_1 \\ 4_2 \\ 4_3 \\ 4_4 \end{pmatrix}$$

$\hat{F}$ هي دهمونت ضربة

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{F} \end{pmatrix}$$

ونتحصل على (٤) معادلات

$$(F-m_0c^2)4_1 - cp_z 4_3 - c(p_x - ip_y)4_4 = 0$$
$$(F-m_0c^2)4_2 - c(p_x+ip_y)4_3 + cp_z 4_4 = 0$$
$$(F+m_0c^2)4_3 - c(p_x-ip_y)4_2 - cp_z 4_1 = 0$$
$$(F+m_0c^2)4_4 + cp_z 4_2 - c(p_x+ip_y)4_1 = 0$$

كثافة الاحتمال وكثافة التيار

لنكتب الشكل الخاتق للمعادلة (١٩) بالصيغة التالية

$$4^+ [\hat{F} - c(\alpha_n \hat{p}_n) - \beta_3 m_0 c^2] = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عند انتقال 4^x تتغير اشارة $i\hbar$

$$-4^x(i\hbar\nabla) = (i\hbar\nabla)4$$

$$4^x\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)4$$

وبالتالي نكتب المعادلتين (16) و (17) بالشكل

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)4 - c\left[\alpha\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)\right]4 - \beta_3 m_0 c^2 4 = 0 \quad (17)$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)4^x - c\left[i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right]4^x\alpha_n - m_0c^2 4^x\beta_3 = 0 \quad (18)$$

بالاستفادة من (13)

نضرب المعادلة (17) بالتابع 4^x من اليمين والمعادلة (18) ب 4 من جهة اليمين ومن ثم نطرح ناتج الضرب 18 من 17

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(4^+4) + div(4^+\alpha_n 4) = 0 \quad (19)$$

بمطابقة (19) مع معادلة الاستمرار

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

نحصل على معادلتي الاستمرار

$$\rho(\vec{r},t) = e4^*4$$
$$j(\vec{r},t) = ec4^*\alpha 4 \quad (21)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعرف كثافة الاحتمال وجود جسيم واحد في الفراغ

$$\rho_0 = \frac{\rho}{e} = \psi^* \psi = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4$$

نلاحظ ان ρ_0 موجبة دوماً مما يخالف فرضية (غلين جوردن)

الحركة الموجة (el) السبين

نعين نعين طاقة Ec و التوابع الموجية

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_0 \psi \quad \ldots (23)$$

$$(E = H_0 | \psi >$$

نضع المعادلة 23 الحيات الشغرة لجملة فيرمي

(A, ϕ) ثابتان

نعوض التابع الموجي

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \varepsilon t\right) \quad (24)$$

نعوض 24 في 23

$$\varepsilon \psi(\vec{r}) = \hat{H}_0 \psi(\vec{r}) \quad (25)$$

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (26)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(27)

$$\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 4_1 \\ 4_2 \end{pmatrix} \qquad \chi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 4_3 \\ 4_4 \end{pmatrix}$$

باستخدام العلاقات (26) وقيم α و β_3 نجد (25)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \phi \\ \varepsilon & \chi \end{pmatrix} = \left[c \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix} \hat{p} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

نجد

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\phi &= c(\alpha' \hat{p})\chi + m_0 c^2 \phi \\ \varepsilon\chi &= c(\alpha' \hat{p})\phi - (m_0 c^2)\chi \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

نوحد البوبات بجملة معادلتين

$$\left.\begin{aligned} (m_0 c^2 - \varepsilon)\phi + c(\alpha' \hat{p})\chi &= 0 \\ c(\alpha' \hat{p})\phi - (m_0 c^2 + \varepsilon)\chi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 29$$

نكافئ العلاقتان (29) معادلة ديراك 25

$$\begin{vmatrix} (m_0 c^2 - \varepsilon) & c(\alpha' \hat{p}) \\ -c(\alpha' \hat{p}) & +(m_0 c^2 + \varepsilon) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (30)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$(\alpha\vec{A})(\alpha\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\alpha(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$(m_0c^2 - \varepsilon)(m_0c^2 + \varepsilon) - [-c(\alpha'\hat{p})\,c(\alpha'\hat{p})] = 0$$

$$m_0^2c^4 - \varepsilon^2 + c^2p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2$$

$$c^2(m_0^2 + p^2) \Rightarrow Ep^2$$

$$Ep = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$$

$$\varepsilon^2 = Ep^2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \pm Ep} \quad \dots(32)$$

حلان لمعادلة ديراك هما الحل (1)

$$\varepsilon = Ep = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$$

الحل الموجب لمعادلة ديراك وهو الحل الموافق لحالات التي طاقتها موجبة

الحل (2) $\varepsilon = -Ep = -c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$ بالحل السالب لمعادلة ديراك (ضد المادة) حيث سمي ضد (e) د بوزيترون ولهذه المادة التي اد خلها ديراك بجداً جميعاً لـ بناء وخلق الأكوان

// انتهت المحاضرة //

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة