كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك الكم ١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

العزم الحركي

- تعريف العزم الحركي ومركبات العزم الحركي في الإحداثيات الديكارتية والكروية ،
يعرف العزم الحركي (عزم كمية الحركة ، عزم الاندفاع ، العزم الزاوي)
لجسم في الميكانيك الكلاسيكي بالعلاقة

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

وحسب الفرضية الأولى عكس تمثيله بمؤثر

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \hat{r} \times \hat{\nabla}$$

ومركباته

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \quad , \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

أو بشكل آخر

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

لنبرهن هرميتية هذا المؤثر وبالتالي يجب أن نبرهن هرميتية مركباته مثلاً

$$\hat{L}_x^+ = (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)^+ = (\hat{y}\hat{p}_z)^+ - (\hat{z}\hat{p}_y)^+ = \hat{p}_z^+\hat{y}^+ - \hat{p}_y^+\hat{z}^+$$

$$= \hat{p}_z\hat{y} - \hat{p}_y\hat{z} = \hat{y}\hat{p}_z - z\hat{p}_y = \hat{L}_x$$

حيث $[\hat{y}, \hat{p}_z] = 0$ ، $[\hat{z}, \hat{p}_y] = 0$ وبنفس الطريقة نبرهن البقية.

- مركبات $\hat{L}$ بالإحداثيات الكروية أي يجب التحول من x, y, z إلى r, θ, φ حيث

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

مع العلم أن

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

؛ $\psi(x, y, z)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

إذا أجرينا الاشتقاق وفرضنا أن $\rho = r\sin\theta$ ولاحظنا $\rho^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{xz}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{yz}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -y\frac{\partial\psi}{\partial x} + x\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة $\frac{\hbar}{i}$ نجد مباشرة المركبة $\hat{L}_z$ وهي

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ولحساب $\hat{L}_y$ نضرب طرفي المعادلة الأولى السابقة ب $\frac{x}{\rho}$ والثانية ب $-\frac{yz}{\rho r^2}$

ثم نجمع العلاقتين

$$z\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\frac{\partial \psi}{\partial z} = \cos\varphi\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \sin\varphi \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

وبعد ضرب طرفي العلاقة ب $\frac{\hbar}{i}$ نحصل $\hat{L}_y$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} - \sin\varphi \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

ولحساب L_x نضرب معادلة الأولى ب $-\frac{y}{\rho}$ والثانية ب $-xz/\rho r^2$

ثم نجمع طرفا إلى طرف فنجد أخيرا عبارة $\hat{L}_x$ (بعد الضرب ب $\frac{\hbar}{i}$)

$$\hat{L}_x = -\frac{\hbar}{i}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \cos\varphi \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

- بالتعرف للمؤثرين $\hat{L}_+$ ، $\hat{L}_-$ اللذان يلعبان دورا كبيرا في دراسة العزم الحركي نجد

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \quad , \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

ويكون شكلها بالاحداثيات الكروية بعد التعويض في شكلها الديكارتي

$$\left.\begin{aligned} L_+ &= \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ L_- &= \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{L}_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial \theta} + i\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

وبفرض $x = \cos\theta$ تصبح العلاقة

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\mp\sqrt{1-x^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

لنحسب الآن $\hat{L}_+ \cdot \hat{L}_-$ ، $L_- L_+$ بدلالة $\hat{L}_x$ ، $\hat{L}_y^2$

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i[\hat{L}_y, \hat{L}_x]$$

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$$

بالجمع نجد

$$\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+ = 2(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2)$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+) + \hat{L}_z^2$$

المبادلات :

- أثبت أن

$$[\hat{L}_x , \hat{x}] = 0$$

$$[\hat{L}_x , \hat{y}] = i\hbar \hat{z} \quad , \quad [\hat{L}_x , \hat{z}] = -i\hbar \hat{y}$$

وعلى التعميم

$$[\hat{L}_i , \hat{r}_j] = i\hbar \delta_{ijk} \hat{r}_k \quad \text{و} \quad \delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk \text{ دوري} \\ -1 & \text{تغير ترتيب} \\ 0 & \text{تكرار أشباه} \end{cases}$$

أثبت أن

$$[\hat{L}_x , \hat{P}_x] = 0$$

$$[\hat{L}_x , \hat{P}_y] = i\hbar P_z \qquad [\hat{L}_x , \hat{P}_z] = -i\hbar \hat{P}_y$$

وبالتعميم

$$[\hat{L}_i ; \hat{P}_i] = i\hbar \delta_{ijk} \hat{P}_k$$

كما عليك البرهان أن $\hat{L}^2$ يتبادل مع كل مركباته

وأيضاً عليك البرهان أن

$$[\hat{L}_i , \hat{L}_j] = i\hbar \delta_{ijk} \hat{L}_k$$

أوجد المبادل

$$[\hat{L}_\pm , \hat{L}_z] = [\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y , \hat{L}_z] = [\hat{L}_x , \hat{L}_z] \pm i[\hat{L}_y , \hat{L}_z]$$

$$= i\hbar \hat{L}_y \pm i(i\hbar \hat{L}_x) = \mp\hbar \hat{L}_x - i\hbar \hat{L}_y = \mp\hbar(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y)$$

أي أن

$$[\hat{L}_\pm , \hat{L}_z] = \mp \hat{L}_\pm$$

أما المبادل

$$[\hat{L}_+ , \hat{L}_-] = [\hat{L}_x + i\hat{L}_y , \hat{L}_x - i\hat{L}_y] = 2\hbar \hat{L}_z$$

الحركة في حقل مركزي متناظر.

إن حركة جسيمين كتلتها m_2 , m_1 لها الاحداثيات $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ يتفاعلان بواسطة الكمون $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$. تؤول الحركة الى حركة جسم واحد في حقل مركزي متناظر كلاسيكياً ومن أجل ذلك نكتب تابع لاغرانج

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m_1 \vec{r}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{r}_2'^2 - V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

حيث $\vec{P}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1'} = m_1 \vec{r}'$ ، $\vec{P}_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2'} = m_2 \vec{r}'$

فبالتعويض $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$ فيصبح لاغرانج

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \vec{R}'^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{r}'^2 - V(\vec{r})$$

حيث $M = m_1 + m_2$ و $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ الكتلة المختزلة.

وبالتالي فتابع هاملتون لجملة الجسيمين

$$H = \sum_j P_j q_j' - \mathcal{L} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$$

حيث $P = M\vec{R}'$ إندفاع مركز الكتلة.
$p = \mu \vec{r}'$ الإندفاع النسبي

وبالتقابل مع ميكانيك الكم (تابع هاملتون ← مؤثر هاملتون

$$-i\hbar \nabla_R = \hat{P}$$
$$-i\hbar \nabla_r = \hat{p}$$

فيصبح المؤثر

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \hat{V}(r)$$

وبالتالي معادلة شرودنجر

$$\hat{H} \psi(\vec{R}, \vec{r}) = E \psi(\vec{R}, \vec{r})$$

وبما أن مؤثر هاملتون انقسم إلى جزء تابع لمركز الكتلة R وجزء للاحداثي النسبي فإن التابع الموجي $\psi(\vec{R}, \vec{r})$ سينقسم إلى جداء تابعين مستقلين هما $\psi(r)$ يصف حركة الكتلة المختزلة و $\varphi(\vec{R})$ حركة مركز الكتلة عند عدم وجود قوى خارجية تؤثر على جملة الجسيمين.

وهذان التابعان يحققان المعادلتين

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 \varphi(\vec R) = E_R\, \varphi(\vec R)$$

$$\left[-\frac{\hbar}{2\mu}\nabla_r^2 + \vec V(r)\right]\psi(r) = E_r\, \psi(\vec r)$$

عندما تكون $m_1 >> m_2$ فإن الكتلة المختزلة μ تصبح m_2

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} \approx m_2 = m$$

وتنطبق هذه الحالة على الحركة في حقل مركزي متناظر حيث وجود حقل متناظر $V(\vec r)$ ناتج عن جسم كتلته كبيرة مثلاً النواة ويتحرك ضمن هذا الحقل جسم آخر كتلته صغيرة بالنسبة للأول مثلاً الالكترون وتصبح معادلة شرودنجر

$$\nabla_r^2 \psi(\vec r) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(\vec r)\right]\psi(\vec r) = 0$$

وبتحويل ∇^2 للاحداثيات الكروية عن طريق الاحداثيات المعممة

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

ويمكن فصل المؤثر إلى مؤثرين

$$= \nabla^2(r) + \frac{1}{r^2}\nabla^2(\theta,\varphi)$$

وبالتالي تصبح معادلة شرودنجر

$$\left[\nabla^2(r) + \frac{1}{r^2}\nabla^2(\theta,\varphi)\right]\psi(r,\theta,\varphi) + k^2(r)\,\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

حيث

$$k^2(r) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]$$

ونعتبر حل هذه المعادلة بطريقة فصل المتحولات بحيث نعتبر $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$

بعد الضرب بـ r^2 نحصل

$$\frac{r^2\nabla^2(r)R(r)}{R(r)} + \nabla^2(\theta,\varphi)\frac{Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} + r^2k^2(r)\frac{R(r)Y(\theta,\varphi)}{R(r)Y(\theta,\varphi)} = 0$$

بالفرز

$$\frac{r^2\nabla^2(r)R(r)}{R(r)} + r^2k^2(r) = -\frac{\nabla^2(\theta,\varphi)Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \lambda$$ ثابت

$$\nabla^2(r)R(r) + R(r)k^2(r) - \lambda\frac{R(r)}{r^2} = 0 \quad (1)$$ نقسم إلى معادلتين

$$\nabla^2(\theta,\varphi)Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0 \quad (*)$$

28

إن المعادلتين احداهما تابعة لـ r والثانية لـ (θ, φ) وبما أن الحركة في حقل مركزي متناظر تابع لـ r فقط وبالتالي فالمعادلة صحيحة من أجل كل أنواع الحركة في الحقل المركزي والحل العام لهذه المعادلة نجده بالطريقة نفسها لفصل المتحولات

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\,\phi(\varphi)$$

$$\nabla^2(\theta,\varphi) = \nabla^2(\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\nabla^2\varphi$$

حيث

$$\nabla^2(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) \quad \& \quad \nabla^2\varphi = \frac{d^2}{d\varphi^2}$$

نعوض في المعادلة السابقة (*) نجد

$$\frac{\nabla^2(\theta)\,\Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\nabla^2(\varphi)\,\phi(\varphi)}{\phi(\varphi)} + \lambda = 0$$

$$\sin^2\theta\,\frac{\nabla^2(\theta)\,\Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\nabla^2(\varphi)\,\phi(\varphi)}{\phi(\varphi)} = m^2$$

وبالتالي نحصل على معادلتين

$$\nabla^2(\theta)\,\Theta(\theta) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla^2(\varphi)\,\phi(\varphi) + m^2\phi(\varphi) = 0 \qquad (3)$$

وبالتالي انقسمت معادلة شرودنجر الى ثلاث معادلات هذه المعادلات مستقلة وللحل نبدأ بالثالثة

حلها من الشكل

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + m^2\phi = 0$$

$$\phi = C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi} \quad \text{أو} \quad \phi = A\cos(m\varphi + \varphi_0)$$

- إن الحل $A\cos(m\varphi+\varphi_0)$ يعني فيزيائياً أن الجسيم يتحرك حركة اهتزازية حول مركز القوى على اعتبار مركز الاحداثيات
- الحل $e^{\pm im\varphi}$ يعني أن الموجة المرافقة له تتحرك على دائرة بحيث يصنع نصف القطر الواصل من مركز القوى إلى الجسيم المتحرك زاوية φ ونستفيد هذا الحل لأنه أعم ويمكن اعتماد جزء منه على اعتبار m موجبة وسالبة $\phi = Ce^{im\varphi}$ وبالتالي يبقى من شرط التنظيم

$$\int_0^{2\pi} c^* c\, e^{-im\varphi} e^{im\varphi} d\varphi = c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

وتحسب قيمة m من وحدانية تعيين التابع والتي تقضي فيزيائياً أن الجسم الموصوف بـ Φ لا يمكن أن يوجد بوضعين مختلفين آن معاً ولنطبق هذا على التابع بدوري

$$\Phi(\varphi') = \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

بالتعويض في التابع الناتج Φ نجد

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi+2\pi)} \Rightarrow e^{2im\pi} = 1$$

ومن أجل تحقيق هذا الشرط يجب أن يكون

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$$

ويسمى m العدد الكمي المغناطيسي

ويمكن التأكد أن التابع Φ يحقق شرط التوحد ولذلك يمكن اعتبار هذه التوابع متجهات في فراغ هيلبرت وتطبق كل العمليات التي تجري على المتجهات في الفراغ العادي وحل المعادلة (2) وحساب $\Theta(\theta)$ نفرض متحولاً جديداً $x = \cos\theta$ فيكون

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$$

وبالتالي يصبح

$$\nabla^2(\theta)\,\Theta(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta}\right)\Theta$$

$$= -\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\frac{d}{dx}\left[\sin\theta\left(-\sin\theta\frac{d}{dx}\Theta\right)\right] = \left[(1-x^2)\Theta'_x\right]'$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد

$$(*)\quad \left[(1-x^2)\Theta'\right]' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0$$

يوجد نقطتا شاذة $x = \pm 1$ وللتخلص من الشذوذ نبحث عن حل من الشكل

$$\Theta(x) = (1-x^2)^{\frac{s}{2}} u(x)$$

$$\Theta'(x) = -sx(1-x^2)^{\frac{s}{2}-1} u(x) + (1-x^2)^{\frac{s}{2}} u'(x)$$

نضرب بـ $(1-x^2)$ ثم الاشتقاق نجد

$$(1-x^2)\Theta' = -sx(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u(x) + (1-x^2)^{\frac{s}{2}+1} u'(x)$$

$$\left[(1-x^2)\Theta'\right]' = s^2x^2(1-x^2)^{\frac{s}{2}-1} u(x) - sx(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u' + (1-x^2)^{\frac{s}{2}+1} u'' - s(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u$$
$$- 2\left(\frac{s}{2}+1\right)x(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u'$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (*)

29

$$(1-x^2)u'' - 2x(s+1)u' + \left(\frac{s^2x^2}{1-x^2} - s + \lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)u = 0$$

$$\frac{s^2x^2}{1-x^2} = \frac{s^2(x^2-1)}{1-x^2} + \frac{s^2}{1-x^2} = -s^2 + \frac{s^2}{1-x^2}$$

بالتعويض

$$(1-x^2)u'' - 2x(1+s)u' + \left(\lambda - s^2 - s + \frac{s^2-m^2}{1-x^2}\right)u = 0$$

عندما $x \to 1$ نقطة شاذة وأيضا ثابت اختياري فبإمكاننا اختياره $s = \pm m$ والحلين متكافئين لأن المعادلة تتبع m^2 ويمكن الحصول على أحدهما من الآخر

$$\Theta(m) = A\,\Theta(-m)$$

لذلك نبحث عن الحلول التي توافق m الموجبة $m = s \geq 0$ عندئذ نكتب المعادلة بالشكل

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (\lambda - m(m+1))u = 0$$

كلا نفرض أن الحل عبارة عن سلسلة كونها لا تحتوي على الشذوذ (فروبنيوس)

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$$

$$\Rightarrow u'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$$

بعد التعويض نحصل على

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k\left[\lambda - (k+m)(k+m+1)\right]\right\}x^k = 0$$

ولا يتحقق ذلك إلا إذا كانت الأمثال معدومة وتنعدم الأمثال عندما يكون

$$a_{k+2} = -\frac{\lambda - (k+m)(k+m+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

فالزوجية تعطي الزوجية انطلاقاً من a_0 والفردية تعطي الفردية انطلاقاً من a_1 وبما أن التابع الموجي محدود فيجب أن تتقطع السلسلة عند حد ما وليكن q بحيث $a_{q+2} = 0$ بشرط $a_q \neq 0$ أي أن:

$$\lambda = (q+m)(q+m+1) \quad ; \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

إذا فرضنا أن $l = q+m$ (عدد كمي مداري) وبالتالي $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$

أي أن $\lambda = l(l+1)$ حيث $l \geq m$

فتتحول المعادلة التفاضلية إلى

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + [l(l+1) - m(m+1)]u = 0$$

وهي معادلة ليجندر وهي من الشكل

$$u(x) = a_{l-m}\, x^{l-m} + a_{l-m-2}\, x^{l-m-2} + \cdots + \begin{cases} a_0 \\ a_1 \end{cases}$$

يمكن التعبير عن التابع $u(x)$ بتوابع ليجندر $P_l^m(x)$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

وكما وجدنا سابقاً أن

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left[\frac{(x^2-1)^l}{2^l\, l!}\right] \quad ; \quad m>0$$

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x) \quad ; \quad m<0$$

وبالتالي فإن قيم

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm l \Leftarrow |m| > l$$

وبالتالي التوافقات الكروية

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = a_m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

حيث

$$a_m = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ (-1)^m & m<0 \end{cases}$$

إن $\lambda = l(l+1)$ هو القيمة الخاصة للمؤثر $\nabla^2(\theta,\varphi)$ أو $\hat{L}^2$

وإن m هو القيمة الخاصة للمؤثر $\frac{d}{d\varphi}$ والذي يرتبط مع L_z بالعلاقة

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

وهي المعنى الفيزيائي للأعداد الكمية m أو λ وبالتالي l.