كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك الكم ١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية ، تكنلوجيا المعلومات والاتصالات

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

ويمكن أن يعرف كثيرحدود هيرميت من المرتبة n بالشكل التالي

$$H_n(y) = (2y - \frac{d}{dy})^n \times 1$$

تمرين: احسب القيمة المتوقعة للكميات x^n ، p_x ، p_x^2 في الحالة

$$\psi_0 = (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$$

$$\langle x^n \rangle_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* x^n \psi_0 dx = (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ odd} \quad \text{فردي} \\ 2\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx & \text{if } n \text{ even} \quad \text{زوجي} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}$$

- القيمة المتوقعة لـ p_x نجد

$$\langle p_x \rangle_{\psi_0} = \langle \psi_0 | (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi_0 \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \frac{d}{dx} \psi_0 dx$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} (-\alpha x) e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx$$

$$= +i\alpha\hbar (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$$ عدد فردي و $n=1$

- القيمة المتوقعة لـ p_x^2

$\in p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ نعلم أن $p_x^2 = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\langle p_x^2 \rangle_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$$

العزم الحركي

يعرف كلاسيكياً ويطلق عليه (عزم كمية الحركة) عزم الاندفاع) العزم الزاوي

$\vec{L}$ بالشكل

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

وحسب الفرضية الأول أن كل ملحوظ فيزيائي يقابل مؤثراً في ميكانيك الكم فإن

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{P} = \frac{\hbar}{i} \hat{r} \times \hat{\nabla}$$

بعد تحليله كلاسيكياً

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yP_z - zP_y) + \vec{j}(zP_x - xP_z) + \vec{k}(xP_y - yP_x)$$

بالتقابل مع $\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$ في

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}_x &= (\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y) \\ \hat{L}_y &= (\hat{z}\hat{P}_x - \hat{x}\hat{P}_z) \\ \hat{L}_z &= (\hat{x}\hat{P}_y - \hat{y}\hat{P}_x) \end{aligned}\right\}$$ مركبات العزم الحركي أو مركبات المؤثر المقابل.

أو بالشكل

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}_x &= \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \hat{L}_y &= \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\}$$ و $\left\{\begin{aligned} P_x &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \\ P_y &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \\ P_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right.$

لنبرهن أن هذا المؤثر الخطي متناظر $\hat{L}_x$

$$\hat{L}_x^{+} = (\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y)^{+} = (\hat{y}\hat{P}_z)^{+} - (\hat{z}\hat{P}_y)^{+} = \hat{P}_z\hat{y} - \hat{P}_y\hat{z} = \hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y = \hat{L}_x$$

لأن

$$[\hat{y}, \hat{P}_z] = 0 \Rightarrow \hat{y}\hat{P}_z = \hat{z}\hat{P}_y$$
$$[\hat{z}, \hat{P}_y] = 0 \Rightarrow \hat{z}\hat{P}_y = \hat{y}\hat{P}_z$$

نقول عن $\hat{L}$ بأنه عزم حركي إذا حققت مركباته العلاقات التالية:

$$\left.\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar L_z \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar L_x \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\hat{L}_k, \hat{L}_\ell] = i\hbar \sum_{klm} \hat{L}_m$$

حيث

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 0 & \text{إذا تساوى دليلان} \\ 1 & \text{إذا كانت الدلائل دورية} \\ -1 & \text{غير دورية} \end{cases}$$

$$[\hat{L}_k, \hat{x}_l] = i\hbar\, \varepsilon_{klm} x_m$$
$$[\hat{L}_k, \hat{P}_l] = i\hbar\, \varepsilon_{klm} P_m$$

وأيضاً بنفس الطريقة

ε_{klm} و: متساوية 0، دورية 1، غير دورية -1

- نعرّف المؤثر $\hat{L}^2$ بالشكل

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

ونحقق علاقات التبادل التالية

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad ; \quad [\hat{L}^2, \hat{L}] = 0$$

نبرهن أحدها

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$$

$[\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] = 0$

$$= [\hat{L}_y \hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z \hat{L}_z, \hat{L}_x]$$
$$= \hat{L}_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z$$
$$= -i\hbar L_y L_z - i\hbar L_z L_y + i\hbar L_z L_y + i\hbar L_y L_z = 0$$

أي أن المؤثرات $\hat{L}^2, \hat{L}_x$ متآلفان

- أثبت أن $[\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$

نتيجة: أن مؤثر العزم الزاوي يتآلف مع كل مركبة من مركباته وهذا يعني أنه يمكننا قياس العزم الزاوي مع أي من مركباته وبالتالي فإن كل من $\{\hat{L}^2, \hat{L}_x\}$، $\{\hat{L}^2, \hat{L}_y\}$، $\{\hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ تشكل مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية وبالتالي يكون لها مجموعة خاصة مشتركة من التوابع يرمز لها بالرمز $\{\alpha, \beta, \gamma, \psi, \dots\}$

القيم الخاصة لمؤثرات العزم الحركي $\hat{L}^2$ ، $\hat{L}_z$

باعتبار ψ تابع خاص للمؤثرين معاً.

$$\hat{L}^2\psi = a\psi \quad (1)$$

$$\hat{L}_z\psi = b\psi \quad (2)$$

لدينا

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \Rightarrow \hat{L}^2 \geq \hat{L}_z^2$$

أي أن

$$\langle \hat{L}^2 \rangle_\psi \geq \langle \hat{L}_z^2 \rangle_\psi \Rightarrow a \geq b^2 \quad (3)$$

متوسط القيمة يتوقف لـ $\langle L^2 \rangle$ على a

$$\langle L^2 \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{L}^2 \psi \rangle = \langle \psi | a\psi \rangle = a\langle \psi | \psi \rangle = a$$

لنستخدم التركيب التالي لـ L_x ، L_y متوسط

$$L_+ = L_x + iL_y \quad \text{و} \quad L_- = L_x - iL_y \quad (4)$$

نضرب

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 - iL_xL_y + iL_yL_x$$

$$= L^2 - L_z^2 - i(L_xL_y - L_yL_x) = L^2 - L_z^2 - i\underbrace{[L_x, L_y]}_{i\hbar L_z}$$

$$L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z \quad (5)$$

$$L_-L_+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y) = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z \quad (6)$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar L_z \quad (7)$$

$$[L_z, L_+] = [L_z, L_x + iL_y] = [L_z, L_x] + i[L_z, L_y]$$

$$= i\hbar L_y + i(-i\hbar L_x) = \hbar L_x + i\hbar L_y = \hbar L_+ \quad (8)$$

تمرين: أثبت أن

$$[L_z, L_-] = -\hbar L_- \quad (9)$$

نؤثر بـ L_+ على (2)

$$L_+ L_z \psi = L_+ b\psi = b(L_+\psi)$$

حسب (8) نجد

$$[L_z, L_+] = L_z L_+ - L_+ L_z = \hbar L_+$$

$$\Rightarrow L_+ L_z = L_z L_+ - \hbar L_+$$

بالتعويض

$$(L_z L_+ - \hbar L_+)\psi = b(L_+\psi)$$

$$\Rightarrow L_z(L_+\psi) = (b+\hbar)(L_+\psi) \quad (10)$$

بعد التأثير بـ L_+ على الناتج نحصل على قيمة خاصة أكبر بقيمة الخاصة بـ $\hbar$

والنتيجة أنه إذا أثرنا على (10) بالمؤثر L_+ نحصل في النهاية على

$$L_z(L_+^2\psi) = (b+2\hbar)(L_+^2\psi)$$

ويزداد في كل مرة بمقدار $\hbar$ بحيث لا تكتمل المتراجحة $a \geq b^2$ تحقق. ولنفرض أن القيمة الذاتية التي تحققها أولا بعد n هي $l\hbar$ والدالة الخاصة هي ψ.

$$L_z(L_+^n\psi) = \underbrace{(b+n\hbar)}_{l\hbar}\underbrace{(L_+^n\psi)}_{\psi}$$

$$L_z\psi = l\hbar\psi \quad (11)$$

إذا أثرنا بـ $\hat{L}_+$ على (1) نجد

$$L_+ L^2\psi = L_+ a\psi = a(L_+\psi)$$

$$[L^2, L_+] = [L^2, L_x + iL_y] = [L^2, L_x] + i[L^2, L_y] = 0$$

$$\Rightarrow L^2 L_+ = L_+ L^2 \Rightarrow L^2(L_+\psi) = a(L_+\psi) \quad (12)$$

وبالتأثير مرة أخرى.

$$L^2(L_+^2\psi) = a(L_+^2\psi)$$

$$\vdots$$

$$L^2(L_+^n\psi) = a(L_+^n\psi) \Rightarrow L^2\psi = a\psi$$

مهما أثرنا بـ L_+ على صادفنا خاصة لـ L^2 فإنه يبقى على القيمة الخاصة لـ L^2 نفسها

نؤثر بـ L_+ على (11)

$$L_+ L_z \psi = \ell\hbar (L_+\psi) \Rightarrow (L_z L_+ - \hbar L_+)\psi = \ell\hbar (L_+\psi)$$

$$\Rightarrow L_z (L_+\psi) = (\hbar\ell + \hbar)(L_+\psi) \quad (13)$$

وهذا يعني أن $\hbar\ell + \hbar$ لا يحقق المعادلة (3) وبالتالي ليست قيمة ذاتية

ولكي تحقق المعادلة (13) يجب أن يكون $L_+\psi = 0$ (14)

نؤثر على هذه المعادلة بـ L_- فنحصل

$$L_- L_+ \psi = 0 \Rightarrow$$

$$(L^2 - L_z^2 - \hbar L_z)\psi = 0$$

$$(a - b^2 - \hbar b)\psi = 0$$

وهذا يعني $\psi \neq 0$

$b = \hbar\ell$ حيث $a - b^2 - \hbar b = 0$

$$\Rightarrow a = \ell^2\hbar^2 + \ell\hbar^2 = \boxed{\hbar\ell(\ell+1) = a} \quad (15)$$

ملاحظة: إذا أثرنا بـ L_- على (2)

$$L_- L_z \psi = L_- b\psi = b(L_-\psi)$$

$$[L_z, L_-] = L_z L_- - L_- L_z = -\hbar L_- \Rightarrow L_- L_z = L_z L_- + \hbar L_-$$

$$\Rightarrow (L_- L_z)\psi = (L_z L_- + \hbar L_-)\psi = b(L_-\psi)$$

$$\Rightarrow L_z (L_-\psi) = (b - \hbar)(L_-\psi) \quad (16)$$

ونؤثر على (1) بـ L_- فنحصل

$$L_- L^2 \psi = L_- a\psi = a(L_-\psi)$$

وهذا يعني أن L^2 مستقل مع حركة ما

$$L^2 (L_-\psi) = a(L_-\psi)$$

وإذا أثرنا بـ L_- بشكل متكرر على (16) نحصل

$$L_z (L_-^n \psi) = (b - n\hbar)(L_-^n \psi)$$

أي أن $(b - n\hbar)$ هي أصغر قيمة تحقق مساواة الأعلى الأكبر

ونعرف $\varphi = L_-^n \psi$ (3)

$$L_z \varphi = (\ell\hbar - n\hbar)\varphi \quad ; \quad b = \ell\hbar$$

وبالتأثير مرة أخرى بـ L_- نكون

$$L_z (L_-\varphi) = \hbar(\ell - n - 1)(L_-\varphi) \quad (18)$$

أي أن $\hbar(\ell - n - 1)$ ليست قيمة ذاتية لأنه يحل بالمثل محل (3) وبالتالي لا تحقق (18)

ولكي تحقق (18) إذا كان $L_-\varphi = 0$ وبالتأثير بـ L_+ نجد

$$L_+ L_-\varphi = 0 \Rightarrow (L^2 - L_z^2 + \hbar L_z)\varphi = 0 \Rightarrow (a - \hbar^2(\ell - n)^2 + \hbar^2(\ell - n))\varphi = 0$$

③ القيمة الدنيا التي تحققها الجملة $\hbar(l-n)$ نعتبرها a :

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow a = \hbar^2(l-n)^2 - \hbar^2(l-n) \quad (19)$$

بالقسمة على $\hbar$ نجد (19) ، (15) حيث $l = \frac{n}{2}$ و $n = 0, 1, 2, \ldots$

نتيجة :

1- القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{L}^2$ هي $\hbar^2 l(l+1)$

2- القيمة الذاتية لـ $\hat{L}_z$ هي عدد صحيح من $\hbar$ بحيث لا يزيد هذا العدد عن l وأصغر من $-l$

أضافا الأعداد الصحيحة تحقق السبب.

$$L_z = m_l \hbar \quad ; \quad m_l = -l, -l+1, \ldots 0, 1, \ldots l$$

$$-l \leq m_l \leq l \quad ; \quad \Delta m = 1$$

نرمز للتابع الذاتي المشترك لـ $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ بالرمز ψ_{l,m_l}

$$\hat{L}^2 \psi_{l,m_l} = \hbar^2 l(l+1) \psi_{l,m_l}$$

$$\hat{L}_z \psi_{l,m_l} = m_l \psi_{l,m_l}$$

$$\hbar^2 l(l+1) \xleftarrow{L^2} \psi_{l,l} \xrightarrow{L_z} l\hbar$$

$$\downarrow L_-$$

$$\psi_{l,l-1} \xrightarrow{L_z} (l-1)\hbar$$

$$\downarrow L_-$$

$$\psi_{l,l-2} \xrightarrow{L_z} (l-2)\hbar$$

$$\downarrow L_-$$

$$\psi_{l,l-3} \xrightarrow{L_z} (l-3)\hbar$$

$$\vdots$$

$$\psi_{l,0}$$

$$\vdots$$

$$\psi_{l,-l} \xrightarrow{L_z} -l\hbar$$

$$\psi_{l,l}$$

$$\downarrow L_+$$

$$\psi_{l,l+1}$$

$$\downarrow L_+$$

$$\psi_{l,l+2} \xrightarrow{L_z} (l+2)\hbar$$

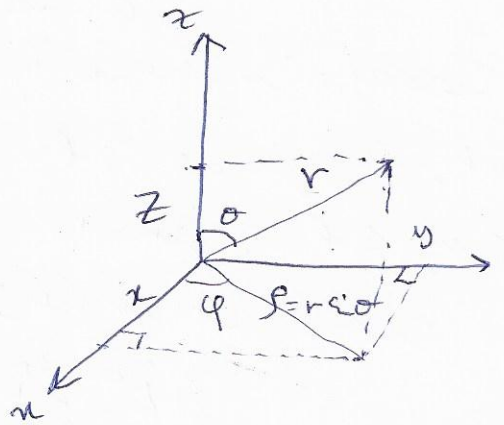
$$\vdots$$

مؤثرات العزم الحركي في الإحداثيات الكروية

لدينا

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$\hat{L}_\pm = L_x \pm i L_y \qquad \& \qquad \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

في الإحداثيات الكروية



$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \\ r^2 &= x^2+y^2+z^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (2)$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

وباستخدام

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (5)$$

لنجد القادير

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{2r} = \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r} = \sin\theta\cos\varphi \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi \quad (7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \quad (8)$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+\cdots}} \Rightarrow -\sin\theta\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\frac{2x}{2r}\cdot z}{r^2} = -\frac{r^2\sin\theta\cos\varphi\cos\theta}{r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\cos\varphi\cos\theta}{r} \quad (9)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \quad (10)$$

وبنفس الطريقة نجد

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r} \quad (11)$$

(24)

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{r\sin\theta\cos\varphi} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \qquad (14)$$

بالتعويض في المؤثرات نجد

$$L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= -i\hbar\left\{r\sin\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) - r\cos\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}$$

$$= -i\hbar\left\{\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

ثم: أوجد عبارة المؤثرات $\hat{L}_x$ ، $\hat{L}_y$ ، $\hat{L}_+$ ، $\hat{L}_-$ و $\hat{L}^2$ بالإحداثيات الكروية.

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

الدوال الخاصة لـ $\hat{L}^2$ ، $\hat{L}_z$

كما لاحظنا أن $\hat{L}^2$ متعلقة بـ (θ, φ) وأن L_z بـ φ

حيث $[\hat{L}^2, \hat{L}_z]$ متبادلين وبالتالي الدوال الخاصة $\psi_{\ell, m_\ell}(r, \theta, \varphi)$

وهي قابلة للاستظام

$$\langle \psi_{\ell,m_\ell} | \psi_{\ell,m_\ell} \rangle = \int |\psi_{\ell,m_\ell}(r,\theta,\varphi)|^2 d\tau = 1$$

وعليه اعتبار هذا التابع هو جداء تابعين

$$\psi_{\ell,m_\ell}(r,\theta,\varphi) = R(r) \cdot Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi)$$

والعنصر الحجمي هو

$$d\tau = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

والتالي نقيم علاقة الاستظام

$$\int_0^r R(r) r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 1$$

بما أن $\hat{L}^2$ ، $\hat{L}_z$ غير مرتبطين بـ r فنختار $R(r)$ بحيث يحقق الشرط السابق

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 1 \quad (\star)$$

ولتحديد التابع Y_{ℓ,m_ℓ} نؤثر على L_z المؤثر

$$\hat{L}_z Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi) = m_\ell \hbar \, Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi) = m_\ell \hbar \, Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi)$$

وبما أن $\hat{L}_z$ يتعلق بـ φ فقط فيكفي فصل التابع إلى تابعين

$$Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\varphi) = \Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi) \cdot \Theta_{\ell,m_\ell}(\theta)$$

بتعويض التابع في المعادلة نجد

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi) \Theta_{\ell,m_\ell}(\theta) = m_\ell \hbar \, \Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi) \Theta_{\ell,m_\ell}(\theta)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi) = i m_\ell \Phi_{\ell,m_\ell} \Rightarrow \frac{d\Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi)}{\Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi)} = i m_\ell d\varphi$$

$$\Rightarrow \ln \Phi_{\ell,m_\ell}(\varphi) = i m_\ell \varphi + C$$

$$\Rightarrow \Phi_m(\varphi) = C e^{i m \varphi}$$

تتعلق بـ φ فقط.

حيث c ثابت التنظيم ولإيجاده نتعامل ϕ فنحصل على

$$\langle \phi_m | \phi_m \rangle = \int_0^{2\pi} \phi_m^* \phi_m \, d\varphi = |c|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = |c|^2 [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi |c|^2 = 1 \Rightarrow |c|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

وبالتالي يصبح التابع

$$\boxed{\phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}}$$

أي

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2i\varphi} \quad , \dots$$

بالعودة إلى (★) نحصل على

$$\int_0^{\pi} |\Theta_{l,m_l}(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta = 1$$

والذي هو شرط تنظيم التابع $\Theta(\theta)$

لنوجد الآن التابع الخاص بـ $\hat{L}^2$

$$\hat{L}^2 Y_{l,m_l}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m_l}(\theta,\varphi)$$

نعوض $\hat{L}^2$ بشكله بالإحداثيات الكروية والتابع $Y_{l,m_l} = \phi_{l,m_l}(\varphi) \cdot \Theta_{l,m_l}(\theta)$ فنحصل على

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \phi_{l,m_l} \Theta_{l,m_l} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \phi_{l,m_l} \Theta_{l,m_l} \right]$$

$$= \hbar^2 l(l+1) \phi_{l,m_l} \Theta_{l,m_l}$$

باستثمار $\phi_m(\varphi)$ وحيث نحصل على $\frac{\partial^2 \phi}{\partial\varphi^2} \phi = -m^2 \phi$ بالعودة واختصار ϕ_{l,m_l} نحصل على

$$-\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta(\theta) = l(l+1) \Theta(\theta)$$

$$\frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta(\theta) - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = l(l+1) \Theta(\theta)$$

ليصبح شكل المعادلة النهائي

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} - \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l(l+1) \right) \Theta(\theta) = 0$$

وهي معادلة ليجندر وحلها حسب توابع ليجندر

$$\Theta_{l,m_l}(\theta) = \begin{cases} (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+m)!}\right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta) & ; m \geq 0 \\ \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}\right)^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos\theta) & m < 0 \end{cases}$$

حيث

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d\cos^m\theta}$$

معادلة ليجندر تقبل حلول محدودة وحيدة القيمة من أجل $l \geq |m|$

وهذه الحلول تأخذ الشكل

$$\Theta_{l,m_l}(\theta) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{2(l-m)!}} \frac{1}{2^l . l!} \cdot \frac{1}{\sin^m\theta} \cdot \frac{d^{l-m}}{d\cos^{l-m}\theta} \sin^{2l}\theta$$

وبالتالي يصبح التابع الذاتي لـ $\hat{L}^2$ ، $\hat{L}_z$ هو

$$Y_{l,m_l}(\theta,\varphi) = (-1)^l \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{2(l-m)!}} \cdot \frac{1}{2^l . l!} e^{im\varphi} \frac{1}{\sin^m\theta} \cdot \frac{d^{l-m}}{d\cos^{l-m}\theta} \cdot \sin^{2l}\theta$$

$$l = 0 \Rightarrow m_l = 0 \Rightarrow Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$l = 1 \Rightarrow m_l = \begin{cases} +1 \Rightarrow Y_{1,1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{3\times 2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{i\varphi} \frac{1}{\sin\theta} \sin^2\theta \\ \qquad = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta \\ 0 \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ -1 \quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi} \end{cases}$$

تمرين: أوجد التوابع الذاتية لـ $\hat{L}^2$ من أجل $l = 2$

$$Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2\theta \qquad Y_{2,1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta \cos\theta$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{-i\varphi}$$

(26)

$$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta\, e^{-2i\varphi}$$

تمرين : أوجد الشكل Y_{ℓ,m_ℓ} من أجل $\ell = 3$

ج- أثبت أن $Y_{1,0}$ ، $Y_{2,1}$ مجموعة توابع متعامدة. حيث $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

د- أوجد $Y_{1,0}$ من $Y_{1,1}$ ثم أثبت أنهما متعامدة.

حل (ج)

$$\langle Y_{10} | Y_{10} \rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{10}^* Y_{10} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

لدينا (توابع ظاهرة β)

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, d\theta = \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

بالمقارنة:

$$2m-1 = 2 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$2n-1 = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \beta\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2}{3}$$

وبالتالي

$$\langle Y_{1,0} | Y_{1,0} \rangle = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1$$ منظم.

$$\langle Y_{1,1} | Y_{1,1} \rangle = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d(-\cos\theta)$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, d(-\cos\theta) = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} d\cos\theta \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\cos\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$$

منظم

$$\langle Y_{1,0} | Y_{1,1} \rangle = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d(\sin\theta) \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{3} \left[\sin^3\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{1}{i} e^{i\varphi}\right]_0^{2\pi} = 0$$

وبالتالي $Y_{1,1}$ و $Y_{1,0}$ متعامدة.

مكتبة A to Z