كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك الكم١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

المعادلة الخاصة (معادلة القيم الخاصة):

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \qquad \forall|\psi\rangle \in L^2 \ \& \ \lambda \in \mathbb{C}$$

حيث $|\psi\rangle$ تابع موجي خاص لـ $\hat{A}$ مقابل للقيمة الخاصة λ

ملاحظة: يمكن تمثيل العناصر $A_{ij} = \langle\psi_i|\hat{A}|\psi_j\rangle$ كعناصر مصفوفة سطرها i وعمودها j حيث $i, j = 1, 2, \ldots, n$ وتكتب كالتالي:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

نظرية: إذا كان مؤثرين هرميتيين التوابع الخاصة نفسها فإنهما يتبادلان.

الفرض: $\hat{A}, \hat{B}$ هرميتيان أي

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}|\psi\rangle &= a|\psi\rangle \\ \hat{B}|\psi\rangle &= b|\psi\rangle\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\forall|\psi\rangle \in L^2 \\ &\forall a, b \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

الطلب

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

البرهان:

$$\hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) = \hat{A}(b|\psi\rangle) = b\hat{A}|\psi\rangle = ba|\psi\rangle$$

$$\hat{B}(\hat{A}|\psi\rangle) = \hat{B}(a|\psi\rangle) = a\hat{B}|\psi\rangle = ab|\psi\rangle$$

وبالتالي هما متساويان لأنهما تبديليان.

نظرية: القيم الخاصة لأي مؤثر هرميتي هي قيم حقيقية.

الفرض: $\hat{A}$ مؤثر هرميتي أي

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \ \left\{\begin{aligned}&\forall|\psi\rangle \in L^2 \\ &\forall\lambda \in \mathbb{C}\end{aligned}\right.$$

الطلب:

$$\lambda = \lambda^* \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

البرهان

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = (\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle)^*$$

$$\langle\psi|\lambda|\psi\rangle = (\langle\psi|\lambda|\psi\rangle)^* = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle$$

$$\lambda\langle\psi|\psi\rangle = (\lambda\langle\psi|\psi\rangle)^*$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^* \quad ; \quad \langle\psi|\psi\rangle \neq 0.$$

نظرية: تكون التابعات الخاصة المقابلات لقيمتين خاصتين مختلفتين لمؤثر هرميتي متعامدين.

الفرض $\hat{A}$ هرميتي

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}|\psi_n\rangle &= \lambda_n|\psi_n\rangle \\ A|\psi_m\rangle &= \lambda_m|\psi_m\rangle \end{aligned}\right| ;\ |\psi_n\rangle, |\psi_m\rangle \in L^2$$

$$|\psi_n\rangle \neq |\psi_m\rangle \quad \text{و} \quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_n, \lambda_m \in R \\ &\lambda_n \neq \lambda_m \end{aligned}\right.$$

البرهان:

$$\hat{A}|\psi_n\rangle = \lambda_n|\psi_n\rangle$$

نضرب $\langle\psi_m|$ من اليسار

$$\langle\psi_m|\hat{A}|\psi_n\rangle = \left(\langle\psi_n|(\hat{A}|\psi_m\rangle)\right)^*$$

$$\langle\psi_m|\lambda_n|\psi_n\rangle = \left(\langle\psi_n|\lambda_m|\psi_m\rangle\right)^*$$

$$\lambda_n\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \lambda_m^*\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \lambda_m\langle\psi_m|\psi_n\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda_n - \lambda_m)\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0$$

$$\lambda_n \neq \lambda_m \Rightarrow \langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0 \Rightarrow$$ إنهما متعامدان

أي أن فراغ هيلبرت عبارة عن مجموعات والتي بأي فراغ متعامدة. أما عندما $m = n$ فإن $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 1$ علاقة التوحيد.

ملاحظة: إذا تبادل مؤثرين هرميتين فإنه يمكن تشكيل قاعدة شاملة من توابعهما الخاصة مع شرط التعامد

$$\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

خواص القيم الخاصة:

١- إذا كان Ψ تابع خاص لـ $\hat{A}$ يقابل القيمة الخاصة λ فإن $\alpha\Psi$ هو أيضاً تابع خاص لـ $\hat{A}$ يقابل القيمة الخاصة λ نفسها حيث $\alpha \in \mathbb{C}$ أي

$$\hat{A}(\alpha\Psi) = \alpha(\hat{A}\Psi) = \alpha(\lambda\Psi) = \lambda(\alpha\Psi)$$

٢- إذا وجدنا مجموعة توابع خاصة $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\}$ مستقلة خطياً تقابل القيمة الخاصة λ نفسها عندها نقول عن A إنها منطبقة (متحللة) ورتبة الانطباق هي عدد التوابع الخاصة التي تقابل λ

٣- نسمي مجموعة القيم الخاصة لمؤثر $\hat{A}$ طيفه ونكتب $Sp(\hat{A}) = \{\lambda_n\}$

٤- القيم الخاصة لمؤثر هرميتي حقيقية

٥- التوابع الخاصة لمؤثر هرميتي والمقابلة لقيم خاصة مختلفة هي متعامدة فيما بينها

٦- الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثران قابلان للتبديل هو أن يكون لهما مجموعة كاملة متعامدة مشتركة من التوابع الخاصة

- برهن أن التابع $\Psi = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ هو تابع خاص للمؤثر $\hat{A}_1 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)$ ثم أوجد القيمة الخاصة المقابلة λ

$$A_1\Psi = \lambda\Psi \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\{x e^{-\frac{x^2}{2}}\} = \frac{d^2}{dx^2}(x e^{-\frac{x^2}{2}}) - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}) - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = -3x e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \lambda = -3$$

تمرين: بيّن أياً من التوابع الموجية التالية تابعاً خاصاً للمؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$

1- $\sin x$　　2- $\cos x$　　3- $\sin^2(x)$

تمثيل المؤثرات الخطية بمصفوفات - المعادلة المميزة :

لتكن $\{\psi_n\} \in V_n$ or L^2 مجموعة كاملة متعامدة ومتواحدة و $\hat{A}$ مؤثر خطي

وكان أثر $\hat{A}$ على أي تابع من $\{\psi_n\}$ هو $\hat{A}\psi_n = X_n$

حيث X_n تابع من الفراغ L^2 وبالتالي يمكن نشره بدلالة المجموعة $\{\psi_n\}$ بالشكل

$$X_n = \sum_m \langle \psi_m | X_n \rangle \psi_m = \sum_m A_{mn} \psi_n$$

أي أن

$$A_{mn} = \langle \psi_m | X_n \rangle = \langle \psi_m | A \psi_n \rangle$$

بإعطاء قيم لـ m و n نستطيع تمثيل A_{mn} المصفوفة الممثلة للمؤثر $\hat{A}$ بالنسبة للقاعدة $\{\psi_n\}$ بالشكل

$$\hat{A}_{mn} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \psi_1 | A | \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_1 | \psi_m \rangle \\ \langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle & & \\ \vdots & & \\ \langle \psi_m | A | \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m | \psi_m \rangle \end{pmatrix}$$

ملاحظة: تتغير مصفوفة المؤثر تبعاً للمجموعة الكاملة (القاعدة) المختارة.

إن المعادلة الخاصة تكتب بالشكل

$$[A] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة:

يمكن إيجاد القيم الخاصة دون اللجوء إلى حل المعادلة الخاصة مباشرة بعد تمثيل المؤثر بمصفوفة كما يلي: لتكن $\{\psi_n\}$ قاعدة في V_n أو L^2 وبالتالي من أجل أي شعاع $\phi \in V$ يكون

$$\phi = \sum c_i \psi_i$$

يمثل هذا الشعاع بعمود $(N \times 1)$ وطالما أن المؤثر $\hat{A}$ يمثل بمصفوفة $(N \times N)$ فنستطيع كتابة المعادلة الخاصة

$$\hat{A}\phi = \lambda\phi \Rightarrow (\hat{A} - \lambda I)\phi = 0$$

فتكتب هذه المعادلة بالشكل

$$\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & & A_{2N} \\ \vdots & & & \\ A_{N1} & & & A_{NN}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = 0$$

تعطي هذه المعادلة N معادلة خطية متجانسة وشرط وجود حل لهذه المعادلة هو انعدام معين الأمثال أي أن

$$\det[\hat{A} - \lambda \hat{I}] = 0$$

وتكون جذور هذه المعادلة هي القيم الخاصة للمؤثر المدروس وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة

تمرين: أوجد القيم الخاصة والأشعة الخاصة المنظمة والأشعة الخاصة لمصفوفة المؤثر

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نكتب المعادلة المميزة

$$|\hat{A} - \lambda \hat{I}| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ -3-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \\ -3-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -3 \\ 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

وهي القيم الخاصة

أو

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ أو } \lambda_2 = -3 \text{ أو } \lambda_3 = 1$$

لإيجاد الأشعة الخاصة سنكتب المعادلة الخاصة من أجل كل قيمة خاصة لنوجد الشعاع الخاص المقابل لها

$$\lambda = 2 \Rightarrow \hat{A}\phi = 2\phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$2c_1 = 2c_1 \Rightarrow$ محقق مهما كان c_1

$-3c_2 = 2c_2 \Rightarrow$ محققة عندما $c_2 = 0$

$c_3 = 2c_3 \Rightarrow$ محققة عندما $c_3 = 0$

ننظم هذا الشعاع

$$\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = \sum \phi_1^* \phi_1 = \sum c_1^* c_1 (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |c_1|^2 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة نوجد ϕ_2 ، ϕ_3

تمرين: أوجد القيم الخاصة والأشعة الخاصة المنظمة للمؤثرات.

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل: من أجل S_x نجد

$$\det(S_x - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

إذاً للمؤثر S_x قيمتين خاصتين $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = -1$

من أجل $\lambda_1 = 1$ يكون $\varphi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ولدينا

$$S_x \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_2 = c_1 \\ c_1 = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$ منطبقتين

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = |c_1|^2 (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |c_1|^2 (1+1) =$$

$$= 2|c_1|^2 = 1 \Rightarrow |c_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أما من أجل $\lambda_2 = -1$ يكون

$$S_x \varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_2 = -c_1 \\ c_1 = -c_2 \end{array}\right.$$

$$c_2 = -c_1 \Rightarrow \varphi_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = -c_2 \Rightarrow \varphi_2 = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بالتنظيم نحصل على

$$\langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle = |c_1|^2 (1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |c_1|^2 (1+1) = 2|c_1|^2 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \varphi_2' | \varphi_2' \rangle = |c_2|^2 (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2|c_2|^2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

إذاً $\lambda_1 = 1$ تقابل تابع خاص واحد فهي ليست منطبقة.

$\lambda_2 = -1$ تقابل تابعين خاصين φ_2 ، φ_2' مختلفين فهي منطبقة من أجل الثانية

أوجد البقية من أجل S_y ، S_z بنفس الطريقة.