كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

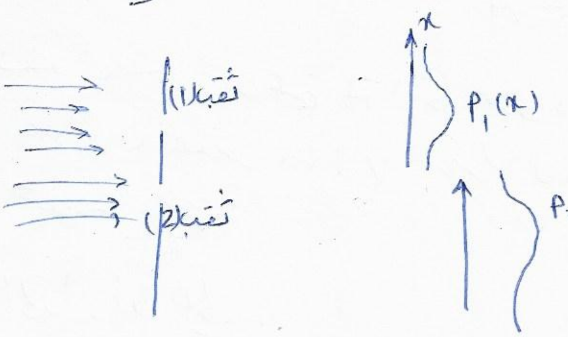
المادة : ميكانيك الكم١

المحاضرة : الثانية/نظري/

التابع الموجي :

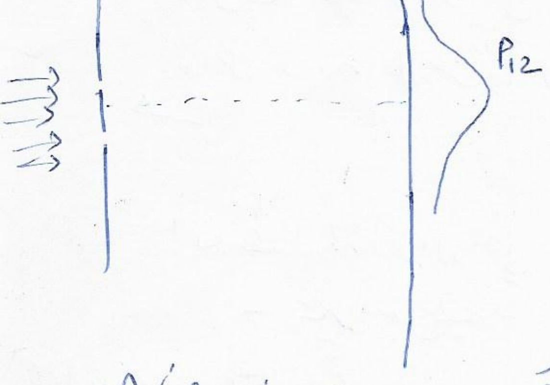
تبين من خلال ظاهرة انعراج الإلكترونات بعد مرورها عبر بلورة وظهور نهايات عظمى وصغرى للشدة والتي تشابه انعراج الأمواج الكهرطيسية أي أنه تحت شروط معينة تظهر الجسيمات سلوك موجة وتأكد ذلك من خلال تجربة شقي يونغ والذي أظهر أنه سلوك الإلكترون بعد خروجه من الثقبين لا يمكن التنبؤ به وبالتالي يسقط بشكل احتمالي على الحاجز، وبالتالي عند سقوط حزمة الالكترونات على لوح يحتوي ثقبا يونغ فتظهر الشدة النسبية للحزمة الساقطة $P_{12}(x)$ لا تساوي مجموع الشدتين $P_1(x) + P_2(x)$.

تم التعبير رياضياً والربط بين الشدة والتابع الموجي المرافق للجسيم فمثلاً الشدة الساقطة من الشق الأول يمكن التعبير عنها بتابع عقدي يتبع x هو $\psi_1(x)$ بحيث $P_1(x) = |\psi_1(x)|^2$ ومن الشق الثاني يمكن التعبير عنه $P_2(x) = |\psi_2(x)|^2$ وعند فتح الشقين معاً يمكن التمثيل لمنحني الشدة $P_{12}(x) = |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2$
كما هو تركيب موجتين $u_1 e^{+i\omega t}$ & $u_2 e^{+i\omega t}$ سعتاهما u_1 ، u_2 وتتناسب شدة المحصلة مع $|u_1+u_2|^2$ وليس مع $|u_1|^2 + |u_2|^2$ تسمى $\psi_1 \psi_2$ توابع موجية كما تظهر الشكل



عند فتح ثقب واغلاق آخر
يظهر الشدة عند ثقب واحد

أما عند فتح الثقبين معاً نجد أنه تداخل الموجتان المارتان من الشقين هو المنحني P_{12}



يتبين من ذلك أن الإلكترون يسلك حيناً سلوك الجسيم وحيناً آخر سلوك موجة

يسمى التابع ψ بالتابع الموجي ومن خلاله يمكن تحديد التوزع الاحتمالي لسقوط الالكترون. ومن أجل ذلك سندرس وتحدد أهم الشرطية والتذكير ببعضها ..

الفراغ الشعاعي :

١- نقول عن المجموعة $V=\{\vec{f},\vec{g},\vec{h},\dots\}$ إنها تؤلف فراغاً شعاعياً إذا كانت :

- معرفاً عليها عملية تشكيل داخلي مثلاً + تقابل وفقها كل زوج مرتب $(f,g)\in V\times V$ لعنصر وحيد $f+g=h\in V$ حيث تؤلف V زمرة تبديلية بالنسبة للجمع وتجميعية ولكل عنصر نظير ويوجد عنصر حيادي

- نعرف على V عملية الضرب لعدد بحيث $\lambda\vec{f}=\vec{h}\in V$ مهما تكن $\vec{f}\in V$ و λ عدد فإذا كانت $\lambda\in\mathbb{C}$ عدد مركب قلنا أنه V فراغ شعاعي مركب

٢- نقول عن مجموعة جزئية $\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}\in V$ إنها مستقلة خطياً إذا كانت $\sum\lambda_i\varphi_i=0\Rightarrow\lambda_i=0\;;\;i=1,2,\dots$

وهذا يعني أنه لا يمكن التعبير عن أي عنصر من عناصر المجموعة بدلالة العناصر الباقية وإن لم تكن مستقلة فهي مرتبطة خطياً فمثلاً إذا فرضنا λ_1,λ_2 غير معدومان ~~وجدنا~~ وتمكنا من كتابة تعبير φ_1 بدلالة باقي العناصر

٣- نقول عن مجموعة جزئية $A=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}\subset V$ إنها تشكل فراغ شعاعي جزئي إذا كان $\varphi_1+\varphi_2\in A$ و $a\varphi_1\in A$ (نفس شروط الفراغ الشعاعي) أو بشكل عام

$$a_1\varphi_1+a_2\varphi_2\in A$$

٤- نقول عن مجموعة A إنها مجموعة كاملة (قاعدة) في V إذا أمكن التعبير عن أي عنصر من V بدلالة عناصر A وبشكل وحيد أي توجد مجموعة مجموعة وحيدة $\phi=\sum\lambda_i\varphi_i$ ونسمي λ_i مركبة ϕ على φ_i

فراغ الجداء الداخلي :

نعرف الجداء الداخلي على V هو عبارة عن تطبيق نرمز له بالرمز $\langle\,|\,\rangle$ تقابل وفقه كل مرتب $(\psi,\varphi)\in V\times V$ لعدد من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث

$$\langle\psi|\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*_{(x)}\varphi_{(x)}\,dx$$

إن هذا الجداء الداخلي يحقق ما يلي :

- غير تبديلي

$$\langle\psi|\varphi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle^*$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle^*=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*\psi\,dx\right)^*=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{**}\psi^*\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\psi^*dx=\langle\psi|\varphi\rangle$$

- توزيعي (خطي من اليمين)

$$\langle\psi|\varphi_1+\varphi_2\rangle=\langle\psi|\varphi_1\rangle+\langle\psi|\varphi_2\rangle$$

- متجانس من اليمين

$$\langle\psi|\lambda\varphi\rangle=\lambda\langle\psi|\varphi\rangle$$

$$\langle \psi_1 + \psi_2 | \varphi \rangle = \langle \psi_1 | \varphi \rangle + \langle \psi_2 | \varphi \rangle$$ - توزيعي من اليسار ،

$$\langle \lambda \psi | \varphi \rangle = \lambda^* \langle \psi | \varphi \rangle$$ - متباين من اليسار ،

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$$ - موجب ،

- فراغ التوابع الموجية :

هو عبارة عن فراغ جداء داخلي عناصره توابع موجية $\psi(r) \in R$
بحيث تكون هذه التوابع تربيعية المكاملة

$$\int_{R^3} |\psi(x,y,z)|^2 \, dx \, dy \, dz < \infty$$

أو

$$\int_{R^3} |\psi(x,y,z)|^2 \, d\tau < \infty$$

ومن أجل جسيمين $\mathcal{L}^2(R^3 \times R^3)$ وتوابعه هي $\psi(r_1, r_2)$ يكون

$$\int_{R^3}\int_{R^3} |\psi(r_1, r_2)|^2 \, d\tau_1 \, d\tau_2 < \infty$$

يسمى هذا الفراغ فراغ هلبرت $\mathcal{H}$

- إذا كان $\varphi, \psi \in V$ وكان جداؤهما يساوي الصفر $\langle \psi | \varphi \rangle = 0$ فنقول إنهما متعامدان
- ونقول عن ψ إنه منتظم إذا كان $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ حيث أن $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ والنظيم يكون حقيقي وموجب ،
- وأيضاً نقول عن المجموعة $S = \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset V$ إنها متعامدة إذا كان $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0 \; ; \; n \neq m$ وإنها منتظمة إذا كانت

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \|\psi_n\|^2 = 1 \; ; \; \psi_n \in S$$

ويمكن جمعهما بالشرط التالي

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & ; \; n \neq m \\ 1 & ; \; n = m \end{cases}$$

نتائج :

١- إذا كانت $A=\{\psi_1,\psi_2,\dots\}\subset V$ جملة كاملة (قاعدة) متعامدة فإنه يمكن التعبير عن أي شعاع $\phi\in V$ بدلالة عناصر A بالشكل $\phi=\sum_i\langle\psi_i|\phi\rangle\psi_i$

البرهان: لدينا $\phi=\sum_i\lambda_i\psi_i$ بالضرب سلميا داخليا بـ ψ_j نجد

$$\langle\psi_j|\phi\rangle=\langle\psi_j|\sum_i\lambda_i\psi_i\rangle=\sum_i\lambda_i\langle\psi_j|\psi_i\rangle=\sum_i\lambda_i\delta_{ji}=\lambda_j$$

بالتالي وبما أن i, j أدلة صامتة يمكن تبديل i بـ j ثم التعويض نجد

$$\phi=\sum_i\langle\psi_i|\phi\rangle\psi_i$$

٢- إذا كانت $A=\{\psi_1,\psi_2,\dots\}\subset V$ متعامدة كانت مستقلة خطياً.

البرهان:

شرط الاستقلال الخطي $\sum_i\lambda_i\psi_i=0\Leftarrow\lambda_i=0$

بالضرب داخلياً سلمياً بـ ψ_j

$$\langle\psi_j|\sum_i\lambda_i\psi_i\rangle=\langle\psi_j|0\rangle=0$$

$$\sum_i\lambda_i\langle\psi_j|\psi_i\rangle=\sum_i\lambda_i\delta_{ji}=\lambda_1\delta_{j1}+\lambda_2\delta_{j2}+\dots+\lambda_j\delta_{jj}=0$$

$$\delta_{jj}=1\Rightarrow\lambda_i=\lambda_j=0$$

٣- إذا كانت $\psi\in V$ فإن

$$\|\lambda\psi\|=\lambda\|\psi\|\ ;\ \lambda\in\mathbb{C}$$

البرهان

لدينا

$$\|\lambda\psi\|^2=\langle\lambda\psi|\lambda\psi\rangle=\lambda^*\lambda\langle\psi|\psi\rangle=|\lambda|^2\|\psi\|^2$$

$$\|\lambda\psi\|=|\lambda|\,\|\psi\|$$

٤- نظرية فيثاغورث:

$$\|\psi+\varphi\|^2=\|\psi\|^2+\|\varphi\|^2$$

$$\|\psi+\varphi\|^2=\langle\psi+\varphi|\psi+\varphi\rangle=\langle\psi|\psi\rangle+\underbrace{\langle\psi|\varphi\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle\varphi|\psi\rangle}_{=0}+\langle\varphi|\varphi\rangle$$

$$=\langle\psi|\psi\rangle+\langle\varphi|\varphi\rangle=\|\psi\|^2+\|\varphi\|^2$$

٥- نظرية متوازي الأضلاع

$$\|\psi+\varphi\|^2+\|\psi-\varphi\|^2=2\|\psi\|^2+2\|\varphi\|^2$$

المؤثرات :

- المؤثر هو مجموعة القواعد الرياضية الناظمة التي تحول تابع ما المجموعة من المتحولات إلى تابع آخر للمتحولات نفسها ويرمز له بـ $\hat{A}$

فمثلاً
$$\hat{A}\psi(x,y,z) = \varphi(x,y,z)$$

مثال : $\hat{A} = \hat{a} + b\frac{d}{dx}$ ونطبقه على التابع $\psi(x)$ فيكون

$$\hat{A}\psi(x) = \left(\hat{a} + b\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = \hat{a}\psi(x) + b\frac{d}{dx}\psi(x) = \varphi(x)$$

- المؤثر الخطي : يكون المؤثر خطياً إذا حقق المعادلة التالية

$$\hat{A}(\alpha\psi + \beta\varphi) = \alpha\hat{A}\psi + \beta\hat{A}\psi$$

- يتساوى مؤثران إذا تساوى تأثيرهما على تابع ما

- مجموع مؤثرين : نقول عن مؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$ إن مجموعهما يساوي $\hat{C}$ إذا كان نتائج تأثيرهما على تابع كيفي يساوي تأثير $\hat{C}$ على نفس التابع.

مثال

$$\hat{C} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$$

$$\hat{C}\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi + r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right) = \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\psi$$

- جداء مؤثرين $\hat{A}\hat{B}$ هو تأثير المؤثر الأول على التابع ثم تأثير المؤثر الثاني

$$(\hat{A}\hat{B})\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) \qquad (\hat{B}\hat{A})\psi = \hat{B}(\hat{A}\psi)$$

وإذا تساوى المؤثرين $\hat{B}\hat{A}\psi$ و $\hat{A}\hat{B}\psi$ فنقول إنهما متبادلان أو تبديليان ويعبر عنهما في هذه الحالة بالمبدل $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$

وبالحالة العامة فإن $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

مثال : $\hat{A} = x$ ، $\hat{B} = \frac{\partial}{\partial x}$

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = x\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi = \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = \frac{\partial x}{\partial x}\psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x} = \left(1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi$$

وبالتالي فهي غير تبديلية.

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

- المبادل غير تبديلي :

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A} = -(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}) = -[\hat{B},\hat{A}]$$

- المبادل توزيعي أو خطي مع الجمع

$$[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$$

- المبادل متجانس مع الجمع والضرب

$$[\alpha\hat{A},\beta\hat{B}] = \alpha\beta[\hat{A},\hat{B}]$$

- أثبت أن

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$$

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}$$

$$= \hat{B}(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})+(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})C$$

$$= \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$$

ملاحظة: كل مؤثر يتبادل مع نفسه

- مؤثر الواحدة هو المؤثر الذي عند تأثيره على تابع يعطي التابع نفسه .

- المؤثر المعاكس هو المؤثر الذي إذا ضرب بمعاكسه كانت النتيجة مؤثر الواحدة .

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$$

$$I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ما هو معاكس المؤثر $\hat{A} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ فإن

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

مثال إذا كان $\hat{A} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ فإن

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

إذا كان $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ فإن

$$\hat{C}^{-1} = (\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$$

ملاحظة: إذا كانت الدوال الموجية متقطعة وتمثل الدوال الموجية بمصفوفات

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \sum_n \psi_n^* \varphi_n$$

$$\langle \psi_n | = \psi_n^*(x) = (\psi_1^* \ \psi_2^* , \cdots \psi_n^*) \qquad n \times 1$$

$$| \varphi_n \rangle = \varphi_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \qquad 1 \times n$$

وبالتالي

$$\langle \psi | \varphi \rangle = (\psi_1^* \ \psi_2^* \cdots \psi_n^*) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = (\psi_1^* \varphi_1 + \psi_2^* \varphi_2 + \cdots \psi_n^* \varphi_n)$$

المؤثر الهرميتي:

نقول عن مؤثر إنه هرميتي إذا كان

$$\langle \hat{A} \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | \hat{A} \varphi \rangle \qquad \forall \psi , \varphi \in \mathcal{L}^2$$

ناتج الجداء الداخلي واحداً سواءً أثر المؤثر $\hat{A}$ على اليمين أولاً أو على اليسار. أو بالشكل

$$\int_{-\infty}^{\infty} (A \psi)^* \varphi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A \varphi \, dx$$

خواص المؤثر الهرميتي:

إذا كان $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ هرميتي فإن

- $\hat{A} + \hat{B}$ هرميتي
- $\hat{A}^n$ هرميتي
- $r \hat{A}$ هرميتي حيث $r \in R$ بفرض $\hat{A}$ هرميتي
- أي كثير حدود لـ $\hat{A}$ الهرميتي يكون هرميتي
- جداء مؤثرين هرميتيين هو هرميتي إذا كانا متبادلين

- أوجد قيمة المبادل $[x , -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}]$

$$[x , -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}] \psi = -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x \psi = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$+ i\hbar (\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x})$$

$$= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \psi + i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} = i\hbar \psi$$

وبالتالي فإن

$$[x , -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}] = i\hbar$$

- بالتعبير عن مركبات شعاع الدفع $\vec{P}$ بالشكل

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

وتمثيلها بالمؤثرات

$$P_x = \hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \ , \quad \hat{P}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \ , \quad \hat{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

وعن مركبات شعاع الموضع بـ

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

وتمثيلها بالمؤثرات

$$x = \hat{x} \ , \quad y = \hat{y} \ , \quad z = \hat{z}$$

وبالتالي

$$[\hat{z},\hat{p}_z] = [\hat{y},\hat{p}_y] = [\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar$$

أما

$$[\hat{x},\hat{p}_y]\psi = -i\hbar\, x\frac{\partial}{\partial y}\psi + i\hbar\frac{\partial}{\partial y}(x\psi) = -i\hbar\, x\frac{\partial\psi}{\partial y} + i\hbar\, x\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

وأيضاً وبالتعميم

$$[x_m, p_n] = i\hbar\,\delta_{mn} \quad ; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad ; \ m,n = x,y,z$$

ملاحظة: مركبات شعاع الموضع متآلفة أو متبادلة فيما بينها لأنها حقيقية ومركبات شعاع الدفع متآلفة مع بعضها أو مع نفسها

$$[\hat{p}_x,\hat{p}_x] = [\hat{p}_x,\hat{p}_y] = [\hat{p}_x,\hat{p}_z] = 0 \quad \text{أو} \quad [\hat{p}_m,\hat{p}_n] = 0$$

مركبات العزم الحركي =

$$\vec{L} = \vec{r}\times\hat{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\hat{L}_x = y p_z - z p_y \ , \ \hat{L}_y = z p_x - x p_z \ , \ \hat{L}_z = x p_y - y p_x$$

وبالتالي فإن

$$[\hat{L}_x,\hat{x}] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}] = [\hat{y}\hat{p}_z,\hat{x}] - [\hat{z}\hat{p}_y,\hat{x}]$$

$$= \hat{y}\underbrace{[\hat{p}_z,\hat{x}]}_{0} + \underbrace{[\hat{y},\hat{x}]}_{0}\hat{p}_z - \hat{z}\underbrace{[\hat{p}_y,\hat{x}]}_{0} - \underbrace{[\hat{z},\hat{x}]}_{0}\hat{p}_y = 0$$

$$[\hat{L}_x,\hat{y}] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{y}] = [\hat{y}\hat{p}_z,\hat{y}] - [\hat{z}\hat{p}_y,\hat{y}]$$

$$= y\underbrace{[p_z,y]}_{0} + \underbrace{[y,y]}_{0}p_z - \hat{z}[\hat{p}_y,\hat{y}] - \underbrace{[z,y]}_{0}p_y$$

$$= -z(-i\hbar) = i\hbar z$$

$$[\hat{L}_y,\hat{x}] = -i\hbar z$$

بأخذنا التعميم

$$[L_m, x_n] = i\hbar\,\varepsilon_{mnk} \quad ; \quad \varepsilon_{mnk} = \begin{cases} 0 & \text{دليلان متساويان} \\ 1 & \text{الأدلة دورية} \\ -1 & \text{ليست دورية} \end{cases}$$