كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك الكم١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية ، تكنلوجيا المعلومات والاتصالات

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

ميكانيك كم /١/

الفيزياء
- ١- الكلاسيكية
  - ١- نيوتن
  - ٢- الأمواج
- ٢- الحديثة
  - النسبية

١- الكلاسيكية:

١-١ نيوتن: ١- مبدأ العطالة

٢- قانون التحريك الأساسي $\vec{F} = m\vec{a}$

٣- مبدأ الفعل ورد الفعل

لتطبيق قوانين نيوتن يجب أن تكون الجسم كتلة، وبالتالي الجسم وإن أصغر مسافة بين كتلتين هو مجموع نصفي أقطارهما أي لا يمكن أن تكون الكتلتان في نفس اللحظة وبنفس المكان

١-٢- الأمواج (النظرية الكهرطيسية)

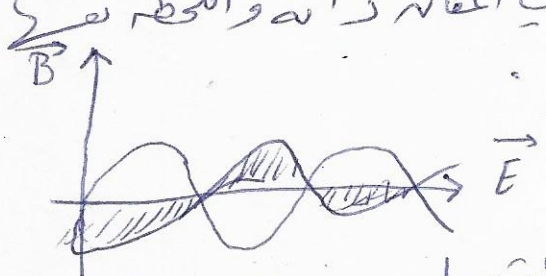
تحكمها قوانين ماكسويل الأربعة المتعلقة بالحقول (الكهربائي والمغناطيسي) مضافاً إليها قوة لورانتز:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

ينتج عنها حركة الأمواج

- الانفراج وهو انحياز الضوء عن مساره فينتشر في جميع الاتجاهات
- التداخل: انفراجان يتشابكان (يتداخلان) مع بعضهما
- الاستقطاب: يعني مطالبة حقل واحد فقط (استقطاب كهربائي - استقطاب مغناطيسي)

من هذا المنظار يمكن لموجتين أن تكونا في المكان ذاته واللحظة نفسها وبالتالي الطاقة في الأمواج مستمرة.



٢- الحديثة:

النسبية

نفرض جسماً كتلته السكونية m_0 بالنسبة لمراقب ما وسرعته v بالنسبة لذات المراقب فإن كتلته الحركية $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ حيث c سرعة الضوء في الخلاء

عندما يكون الجسم ساكن $v = 0$ أو $\frac{v}{c} \to 0$ فتكون الكتلة الحركية مساوية للكتلة السكونية $m = m_0$

أما عندما يكون $v = c$ فيكون $m = \frac{m_0}{0}$ وبالتالي لقانون نعدوم ونصبح الكتلة الحركية لانهائية وهذا يتطلب طاقة لانهائية $E = mc^2$ أي لا يوجد جسم بهذه الطاقة

- الإشعاع الجسم الأسود: الجسم الذي يمتص جميع الأمواج الكهرطيسية.

$E = nh\nu = n\hbar\omega$; $\hbar = \frac{h}{2\pi} \rightarrow 6.626 \times 10^{-34}\ J.S$ أي الطاقة متقطعة.

- فرانك هيرتز: هيرتز أول من أثبت صحة فوانين فلسوين.

الطاقة متقطعة كونه خرق الكهرب بين نقطة وأخرى هو $h\nu_1$

- المفعول الكهرضوئي: عند سقوط ضوء (فوتونات) على صفيحة معدنية فيؤثر هذا الإشعاع والطاقة سطح الصفيحة الكترونات وبالتالي فإن الفوتونات هي كما تملك طاقة عند اصطدامها مع الالكترونات تعطيها طاقة.

- مفعول كومبتون

يتبين أنه عند سقوط فوتون أو اصطدام فوتون مع الكترون فينتج فوتون جديد لتواتر جديد يطول موجة جديد وبالتالي انعكاس الضوء ليس كما سلوك موجة وسلوك جسيم.

- دي برولي: كل جسيم يتحرك يرافقه موجة طولها λ حيث $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}$ سائلة $\lambda = \frac{h}{mv}$ سريعة

- قانون براغ في الانعراج $\lambda = 2d \sin\theta$

θ زاوية الانعراج، d عرض الشقة.

(2) معادلة شرودنجر

$$\psi(\vec{r},t) = A\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$

نصف الجسيمات في الكونية بالتابع الموجي ψ حيث طاقته الكلية E وكمية الحركة p

$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

باشتقاق التابع الموجي بالنسبة للزمن نجد

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \qquad (1)$$

بالاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p_x^2}{\hbar^2}\psi$$

وكذلك لـ y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{p_y^2}{\hbar^2}\psi$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{-p_z^2}{\hbar^2}\psi$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m}$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad ; \quad E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow p^2 = 2mE$$

نجمع المعادلات السابقة

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

وبالتالي

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \qquad (2)$$

بمقارنة (1) و (2) نجد معادلة شرودنجر

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t)$$

إن التابع الموجي $\psi(\vec{r},t)$ ليس له أي معنى فيزيائي وإنما يأتي المعنى الفيزيائي له من خلال مربع طويلته $|\psi(r,t)|^2$ والتي تمثل كثافة احتمال وجود الجسيم في الحجم العنصري dv هو

$$|\psi|^2 dv \Rightarrow \int |\psi|^2 dv = 1$$

شرط التنظيم وهو عبارة عن مجموع احتمالات وجود الجسيم في كل الفراغ.

مربع عدد عقدي

$$z^2 = z\,z^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

هي معادلة شرودنجر تبين أنها متعلقة بالطور فقط والزمن ولإيجاد معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن نفرض أن التابع الموجي هو عبارة عن جداء دوتابعين

$$\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}) \cdot \chi(t)$$

نعوض في المعادلة.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}[\varphi(\vec{r})\chi(t)] = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 [\varphi(\vec{r})\chi(t)]$$

$$i\hbar\, \varphi(\vec{r}) \frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \chi(t) \nabla^2 \varphi(\vec{r})$$

بفرز المتحولات عن كل طرف

$$i\hbar \frac{1}{\chi(t)} \frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(\vec{r})} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \text{const} = E$$

كمية ثابتة

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \frac{1}{\chi(t)} \frac{d\chi(t)}{dt} = E \Rightarrow i\hbar \frac{d\chi(t)}{\chi(t)} = E\,dt & (1) \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(\vec{r})} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) = E \Rightarrow \nabla^2 \varphi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} E\, \varphi(\vec{r}) = 0 & (2) \end{cases}$$

مستقلة عن الزمن

$$(1) \Rightarrow \frac{d\chi(t)}{\chi(t)} = -\frac{iE}{\hbar} dt \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \ln \chi(t) = -\frac{iE}{\hbar} t + C$$

$$\Rightarrow \ln \chi(t) - \ln A = -\frac{iE}{\hbar} t \Rightarrow \frac{\chi(t)}{A} = e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

$$\chi(t) = A\, e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

في الشروط الابتدائية $\Leftarrow A = 1$

$$\chi(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

وبالتالي

$$\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})\chi(t) = \varphi(\vec{r})\, e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

نجد:

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = \psi(r,t) \cdot \psi^*(r,t) = |\varphi(\vec{r})|^2$$

المعادلة (2) هي معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن.

$$E = T + V \Rightarrow T = E - V$$

وبالتالي

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\, \varphi(\vec{r}) = 0$$

نظرية ليوفيل Liouville

الشكل العام

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0$$

حيث ρ كثافة الكتلة أو الشحنة

$\vec{J}$ كثافة تيار المادة أو الشحنة

$$\rho = |\psi|^2 = \psi\,\psi^*$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\psi.\psi^*) = \psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

لدينا معادلة شرود نجر

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{i\hbar}$ فتصبح المعادلة

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^*}{2mi}\nabla^2\psi + \frac{V}{i\hbar}\psi$$

ومرافقه

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{\hbar^*}{2mi}\nabla^2\psi^* - \frac{V}{i\hbar}\psi^*$$

نضرب الأولى بـ ψ^* والثانية بـ ψ والجمع نحصل على

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi}\psi^*\nabla^2\psi + \frac{\hbar}{2mi}\psi\nabla^2\psi^*$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}[\psi\nabla^2\psi^* - \psi^*\nabla^2\psi]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) = 0$$

حاسبين قوسين كتبنا على

$$\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \nabla\psi^*\nabla\psi + \psi^*\nabla^2\psi = \nabla\psi\nabla\psi^* + \psi\nabla^2\psi^*$$

$$= \psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*$$

سنرمز

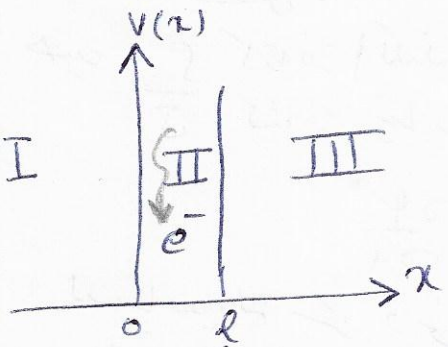
$$J = (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\frac{\hbar}{2mi}$$

أي

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

تطبيقات على معادلة شرودنجر

- دراسة جسيم في حفرة كمونية لانهائية على بعد واحد x احتمال وجود الجسيم (الكترون مثلاً) خارج حدود



$$V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<\ell\\ \infty & x\le 0,\ x\ge \ell\end{cases}$$

لما معادلة شرودنجر $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi$

في المنطقة I و III الكمون لانهائي ولا وجود لاحتمال لوجود الجسيم

أما في المنطقة II فإن $V=0$ وتصبح معادلة شرودنجر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi \quad ;\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

وبما أنه على بعد واحد x فإن $\nabla^2=\frac{d^2}{dx^2}$ وتصبح المعادلة

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)\Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0 \quad ;\quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0$$

وحلها من الشكل

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

ثم تعيين الثوابت من الشروط الحدية

1- التابع موجي يأخذ قيماً منتهية في كل نقطة من نقاط الفراغ

2- التابع موجي يأخذ قيمة واحدة في كل نقطة من نقاط الفراغ

3- التابع موجي مستمر في كل نقاط الفراغ

4- المشتقة الأولى للتابع موجي مستمر.

فيكون

$$\psi(x=0)=0\Rightarrow A+B=0\Rightarrow A=-B$$

$$\psi(x)=Ae^{ikx}-Ae^{-ikx}=2iA\left(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)=2iA\sin kx$$

$$\psi(x=\ell)=2iA\sin k\ell=0\Rightarrow k\ell=n\pi \quad ;\quad n=1,2,3\dots$$

$$\Rightarrow k^2\ell^2=n^2\pi^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\ell^2\Rightarrow E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}n^2 \quad ;\quad n=1,2,3\dots$$

$$\Rightarrow E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}\Rightarrow E_n=n^2E_1$$

وبالتالي فإن سويات الطاقة في حفرة الكمون هي محكمة (مقطوعة) وليست مستمرة
وأن سوية الطاقة الدنيا لا تساوي الصفر في حفرة الكمون بينما في الحالة
الكلاسيكية فإن أصغر طاقة ممكنة
أن الطاقة E تتناسب عكساً مع كتلة الجسيم وأيضاً مع l (عرض حفرة الكمون)

تمرين:

احسب سوية الطاقة الأولى لجملة فيزيائية موصوفة بحفرة كمون لا نهائية على بعد واحد بفرض أنها مكونة من الكترون ($m = 9.109 \times 10^{-31}\ kg$) وإن عرض حفرة الكمون l ($l = 5\ A^\circ = 5 \times 10^{-10}\ m$) مقدرة بالإلكترون فولط.
ثم احسب سوية الطاقة من أجل بروتون حيث ($h = 6.626 \times 10^{-34}\ J.s$)
$m_p = 1.672 \times 10^{-27}\ kg$ ثم قارن قيمة هذه الطاقة مع الطاقة الناتجة عن المفعول الحراري حيث
$E = K_B T$
K_B ثابت بولتزمان $K_B = 1.381 \times 10^{-23}\ J/K$ في درجة حرارة $T = 27^\circ C$

$$1ev = 1.602 \times 10^{-19}\ J.$$

- إن الفرق بين سويتين متتاليتين

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = E_1 [(n+1)^2 - n^2] = E_1 (2n+1)$$

فإن

$$\frac{\Delta E}{E_n} = \frac{E_1 (2n+1)}{E_1 n^2} = \frac{2n+1}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\Delta E}{E_n} \approx \frac{1}{n}$$

تصبح الطاقة مستمرة عندما $n \to \infty$ وبالتالي الفرق بين سويتين متتاليتين يتجه إلى الصفر

بما أن احتمال وجود الجسيم في الحيز dv هو

$$\int dv = \psi^* \psi\, dv$$

فإن احتمال وجوده في كل الفراغ هو الواحد أي

$$\int_v |\psi|^2 dv = 1$$

وهو شرط التنظيم أو التوحيد، حيث:

$$\psi(x) = 2iA \sin Kx = 2iA \sin \frac{n\pi}{l} x \quad ; \quad K = \frac{n\pi}{l}$$

وبالتالي فالتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dv = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left|2iA \sin \frac{n\pi}{l} x\right|^2 dx = |2iA|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x\, dx = 1$$

$$|2iA|^2 \left[\int_{-\infty}^{0} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x\, dx + \int_{0}^{l} + \int_{l}^{\infty} \right] = 1$$

(الأول $\to 0$، الثالث $\to 0$)

$$A = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\ell}} \quad \Leftarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$ وبما أن

فيكون

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{n\pi}{\ell}x \\ E_n &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}n^2 \end{aligned}\right\} \quad ; \; n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{\pi}{2}$$

نستنتج أن

١- إن طاقة الجسيم المتحرك في حفرة كمون تأخذ قيماً متقطعة أي مكممة

٢- إن الجسيم في الحالة الأساسية متحرك ويملك طاقة حركية

٣- تظهر خاصة تكميم الطاقة بوضوح في الجسيمات المتحركة في حفرة كمون

٤- عندما تأخذ n قيماً كبيرة فإننا نحصل على أطياف طاقة مستمرة $\frac{\Delta E_n}{E_n} \to 0$

وهي الحالة التي ننتقل منها من عالم الكم إلى العالم الكلاسيكي.

- دراسة جسيم في حفرة كمون لانهائي ذات ثلاثة أبعاد

درسنا في الفقرة السابقة في بعد واحد فنعمم إلى ثلاثة أبعاد.

$$V(x,y,z)\begin{cases}0 & 0<x<\ell_1,\ 0<y<\ell_2,\ 0<z<\ell_3\\ \infty & x\le 0,\ x\ge\ell_1,\ y\le 0,\ y\ge\ell_2,\ z\le 0,\ z\ge\ell_3\end{cases}$$

نعمم معادلة شرودنغر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,t)+V(x,y,z)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$$

$$\psi(x,y,t)=\psi_{n_1}(x)\ \psi_{n_2}(y)\ \psi_{n_3}(z)$$

والكمون داخل الحفرة معدوم $V(x,y,z)=0$ أي أن

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

بعد التعويض والاستقامة نحصل على

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\psi_{n_1}}\frac{d^2\psi_{n_1}}{dx^2}+\frac{1}{\psi_{n_2}}\frac{d^2\psi_{n_2}}{dy^2}+\frac{1}{\psi_{n_3}}\frac{d^2\psi_{n_3}}{dz^2}\right)=E_{n_1}^{\psi_{n_1}}+E_{n_2}^{\psi_{n_2}}+E_{n_3}^{\psi_{n_3}}$$

$$\psi_{n_1}(x)=\sqrt{\frac{2}{\ell_1}}\sin\frac{n_1\pi}{\ell_1}x \qquad n_1=1,2,3,\dots$$

$$E_{n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_1^2}n_1^2$$

$$\psi_{n_2}(y)=\sqrt{\frac{2}{\ell_2}}\sin\frac{n_2\pi}{\ell_2}y \qquad n_2=1,2,3,\dots$$

$$E_{n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_2^2}n_2^2$$

$$\psi_{n_3}=\sqrt{\frac{2}{\ell_3}}\sin\frac{n_3\pi}{\ell_3}z \qquad n_3=1,2,3,\dots$$

$$E_{n_3}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_3^2}n_3^2$$

وبالتالي

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z)=\psi_{n_1}(x)\cdot\psi_{n_2}(y)\cdot\psi_{n_3}(z)$$

$$=\sqrt{\frac{2^3}{\ell_1\ell_2\ell_3}}\sin\frac{n_1\pi}{\ell_1}x\cdot\sin\frac{n_2\pi}{\ell_2}y\cdot\sin\frac{n_3\pi}{\ell_3}z$$

$$E_{n_1,n_2,n_3}=E_{n_1}+E_{n_2}+E_{n_3}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{\ell_1^2}+\frac{n_2^2}{\ell_2^2}+\frac{n_3^2}{\ell_3^2}\right)$$

- الانطباق

تقول عن سوية طاقة إنها منطبقة إذا قابلت هذه السوية عدة من التوابع الموجية المختلفة أكثر من واحد.

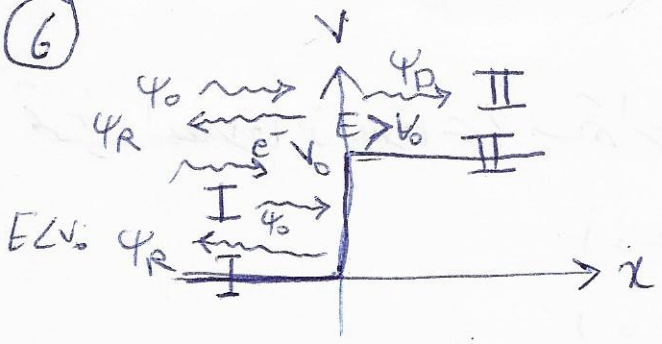
درجة الانطباق هي عدد التوابع الموجية المختلفة التي تقابل تلك السوية

سوية الطاقة	n_1	n_2	n_3	$N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$	$E_N = E_{n_1 n_2 n_3} = NE_1$	$\psi_{n_1 n_2 n_3}$	g_n
1	1	1	1	3	$3E_1$	ψ_{111}	1
2	2	1	1	6	$6E_1$	ψ_{211}	3
	1	2	1			ψ_{121}	
	1	1	2			ψ_{112}	

نلاحظ - سوية الطاقة الثانية $3E_1$ وسوية الطاقة الثالثة الأولى $6E_1$

3	2	2	1	9	$9E_1$	3
	2	1	2			
	1	2	2			
	2	2	2	12	$12E_1$	1
	3	2	1	14	$14E_1$	6
	3	1	2			
	2	3	1			
	2	1	3			
	1	2	3			
	1	3	2			
	3	2	2	17	$17E_1$	3
	2	3	2			
	2	2	3			
	4	1	1	18	$18E_1$	3
	1	4	1			
	1	1	4			
	3	3	1	19	$19E_1$	3
	3	1	3			
	1	3	3			
	4	2	1	21	$21E_1$	6
	4	1	2			
	2	4	1			
	2	1	4			
	1	2	4			

(6)



دراسة جهد على حاجز كمون :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

لمعادلة شرودنجر في

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \xrightarrow{I} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_I = E_I\psi_I$$

$$\nabla^2\psi_I + \frac{2mE_I}{\hbar^2}\psi_I = 0 \Rightarrow \nabla^2\psi_I + k^2\psi_I = 0$$

والحل هو

$$\psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

واردة — منعكسة

في المنطقة II نكتب

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + V_0\psi_{II} = E\psi_{II}$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi_{II} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + k'^2\psi_{II} = 0$$

والحل

$$\psi_{II}(x) = A_2 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x}$$

نافذة — منعكسة

بما أنه لا توجد موجة منعكسة في المنطقة II لأنه لا يوجد حاجز كمون

فإن $B_2 = 0$ وبالتالي

$A_1 = 1$ حيث $\psi_0 = A_1 e^{ikx} = e^{ikx}$ ← الموجة الواردة

الموجة المنعكسة عند الحاجز (حاجز الكمون V_0)

$$\psi_R(x) = B_1 e^{-ikx}$$

الموجة النافذة عبر الحاجز V_0

$$\psi_D(x) = A_2 \cdot e^{ik'x}$$

$E > V_0$

بشكل عام إن كثافة التيار

$$J = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$$

وكثافة تيار الجسيمات المنعكسة

$$J_R = \frac{i\hbar}{2m}(\psi_R\nabla\psi_R^* - \psi_R^*\nabla\psi_R)$$

حيث $\nabla = \frac{d}{dx}$

$$\psi_R^* = B_1^* e^{ikx}$$

$$J_R = -\frac{\hbar k}{m}|B_1|^2$$

$$J_D = \frac{\hbar k'}{m}|A_2|^2 \quad J_0 = \frac{\hbar k}{m}$$

- أثبت أن:

- كثافة تيار الجسيمات الواردة
- معامل الانعكاس
- معامل النفوذية

$$R = \frac{|J_R|}{|J_0|} = |B_1|^2,$$

$$D = \frac{|J_D|}{|J_0|} = \frac{k'}{k}|A_2|^2$$

تمرين: انطلاقا من علاقات الاستمرارية أوجد علاقات B_1, A_2

$$\psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0)$$
$$\psi_I'(x=0) = \psi_{II}'(x=0)$$

$$B_1 = \frac{k-k'}{k+k'} \neq 0 \qquad A_2 = \frac{2k}{k+k'}$$

$$D = \frac{|J_D|}{|J_0|} = \frac{k'}{k}|A_2|^2 \qquad R = \frac{|J_R|}{|J_0|} = |B_1|^2$$ وهذا حسب

إذا كانت $E < V_0 \Leftarrow k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)} \Leftrightarrow k' = iX$

حيث X عدد موجب وبالتالي $0 < \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}$

$$\psi_D = A_2 e^{ik'x} = A_2 e^{iiXx} = A_2 e^{-Xx}$$

وبالتالي كثافة الاحتمال لتواجد الجسيم بمنطقة الحاجز (الناقد)

$$|\psi_D|^2 = |A_2|^2 e^{-2Xx} \neq 0$$

وبالتالي هناك احتمال أن يكون داخل الحاجز الكمومي ويعود.

مكتبة A to Z