كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : كهرطيسية

المحاضرة :الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

معادلات مكسويل في الأوساط المادية
Maxwell's Equations in Materials

عند دراستنا معادلات مكسويل في الفراغ عرّفنا الخواص الكهربائية لهذا الوسط بالمقدارين $\rho = 0, J = 0$. والآن سندرس الحقول الكهرطيسية في الأوساط المادية، التي تحتوي على جسيمات مشحونة، تعمل كمنابع للحقول الكهرطيسية الثانوية، عندما تخضع إلى تأثير حقول خارجية. ولذلك، سنُدْخل في معادلات مكسويل مفهومين: مفهوم متجهة الاستقطاب الكهربائي $\vec{P}$ ومفهوم متجهة التمغنط $\vec{M}$. يقودنا ذلك إلى تعريف العازلية الكهربائية النسبية ε_r والنفاذية المغناطيسية النسبية μ_r ، وبالتالي، إلى ربط ε_r بقرينة انكسار الوسط n.

1- نموذج جزيئة فردية A Model for The Individual Molecule:

- نعلم بأن كلور الهيدروجين H^+Cl^- جزيئة قطبية، أي أنها تحوي شحنات موجبة وشحنات سالبة.
- ولكن توجد جزيئات ليس لها شحنات منفصلة مثل الميتان CH_4 . وتكون هذه الجزيئة معتدلة كهربائياً.
- عندما تتعرض جزيئات كهذه لحقلٍ كهربائيٍ شديدٍ تنزاح الشحنات عن مواضع توازنها في الجزيئات،
- ومن ثمَّ تنشأ ثنائيات قطب كهربائية داخلها، الشكل (7-b,a).

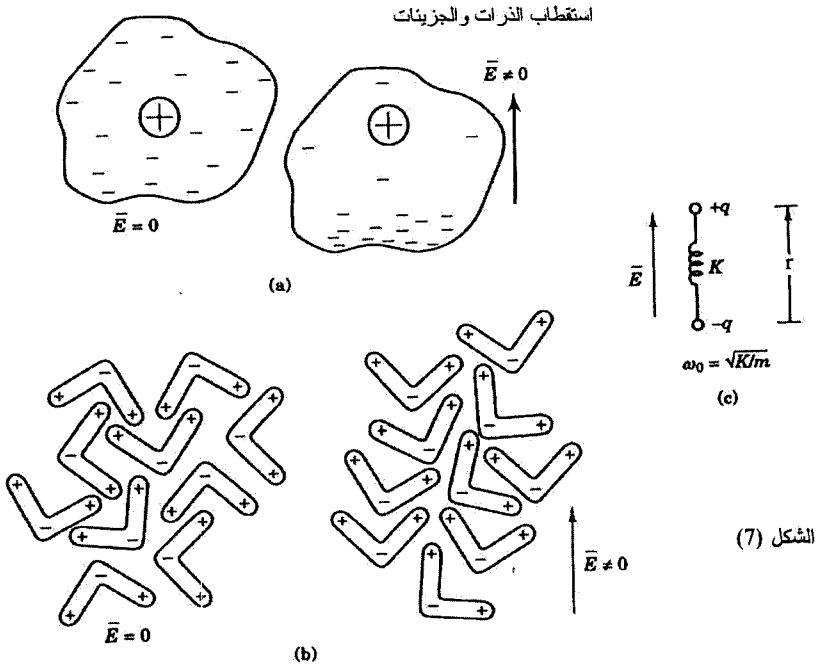
لتكن الشحنة الكهربائية q ذات الكتلة m التي انزاحت عن موضع اتزانها بمقدار r بفعل الحقل الكهربائي الآتي المتغير بالنسبة للزمن:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t), \qquad (37)$$

حيث $\vec{E}_0$ سعة الموجة الكهربائية، و ω ترددها الزاوي.

ليكن ω_0 التردد المميز للشحنة q داخل الجزيئة (التردد الطبيعي). في حالة التجاوب تهتز الشحنة بنفس تردد الموجة الكهربائية، الشكل (7.3-c). ويعطى مقدار إنزياحها بالعلاقة التالية:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(i\omega t). \qquad (38)$$



الشكل (7)

تخضع الشحنة المزاحة إلى القوى التالية:

- القوة الكهربائية بفعل الحقل $\vec{E}$
- وقوة التخامد، التي تعاكس اتجاه سرعة الشحنة المزاحة،
- والقوة المُرجِعة (القوة التي تُرجع الشحنة إلى موضع اتزانها).

وحسب قانون نيوتن الثاني، تُكتب معادلة القوة كما يأتي:

$$m\ddot{r} = qE - \gamma m\dot{r} - \omega_0^2 mr\,, \qquad m(i\omega)(i\omega) \tag{39}$$

حيث γ عامل التخامد.

نبدل العلاقة (38) في (39) فنحصل على مقدار الإنزياح:

$$r = \frac{qE}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}. \tag{40}$$

نُشير هنا إلى أن الحد التخيلي الموجود في هذه العلاقة مرتبط بعملية التخامد.

وكما ذكرنا أعلاه، يؤدي انزياح الشحنة عن موضع توازنها إلى تشكل ما يسمى ثنائي القطب (الديبول)، الذي طوله r.

يُعطى عزم ثنائي القطب بالعلاقة التالية:

$$P_e = qr\,; \tag{41}$$

$$\therefore P_e = \frac{q^2 E}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}. \tag{42}$$

- نستنتج من العلاقة (42.3) أن عزم ثنائي القطب الكهربائي $\vec{P}_e$ يهتز مع الحقل $\vec{E}$ ويأخذ اتجاهه.
- وتدعى النسبة بين العزم الكهربائي وحقل التحريض الكهربائي بالاستقطابية الكهربائية α، التي تُعبّر عن انزياح الشحنات الكهربائية داخل الجزيئة بفعل الحقل الكهربائي المطبق، وتقاس بوحدة الحجم:

$$\alpha = \frac{\vec{P}_e}{\vec{D}} = \frac{q^2}{\varepsilon_0 m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega\right)}. \tag{43.3}$$

إذاً، الاستقطابية مقدار عقدي تعتمد على تردد الحقل المطبق ω، وعلى طبيعة الجزيئة أيضاً.

2- متجهة الاستقطاب The Polarization Vector:

طبقاً للنموذج الذري التقليدي تتألف الذرة من نواة موجبة الشحنة محاطة بغمامة من الإلكترونات شحنتها سالبة ومساوية لشحنة النواة. وتكون معظم إلكترونات الذرة مرتبطة بشدة بالنواة (الإلكترونات الداخلية). **تسمى** مثل هذه الإلكترونات **بالإلكترونات المرتبطة أو المقيدة**. في حين تسمى الإلكترونات الخارجية التي يكون ارتباطها بالنواة ضعيفاً، أو مهملاً **بالإلكترونات الحرة**.

إذا طُبق حقل كهربائي على ذرة ما، فإنه سيعمل على إزاحة الإلكترونات المرتبطة (مركز الغمامة الإلكترونية) عن مركز النواة، ومن ثمَّ سيؤدي إلى **نشوء ثنائي قطب كهربائي**.

- في بعض المواد يوجد الاستقطاب من دون تطبيق حقل كهربائي خارجي. تدعى مثل هذه المواد **بالمواد القطبية** كجزيئات الماء والنشادر وكلوريد الهيدروجين.
- بالمقابل، توجد مواد ليست قطبية، أي لا تحوي ثنائيات أقطاب كهربائية في بنيتها.

- يدعى الاستقطاب في المواد القطبية بالاستقطاب الموجّه، وفي المواد غير القطبية بالاستقطاب الإلكتروني، الذي ينشأ بفعل قوى كولون المؤثرة في الشحنات المنفصلة.
- أضف إلى ذلك، توجد مواد لها استقطاب دائم تدعى بالإلكتريتات *Electrolytes*. وهذه المواد مشابهة للمغانط الدائمة، حيث يأخذ الاستقطاب اتجاه الحقل الكهربائي المطبق.
- من جهة أخرى، توجد مواد تُبدي استقطاباً تلقائياً تدعى بالمواد الفيروكهربائية *Ferroelectric*. وعندما نتكلم عن الشوارد، يكون الاستقطاب من النوع الأيوني.

عندما تكون شدة الحقل الكهربائي المطبق على الجزيئة كبيرة كفايةً، يمكننا تقسيم كثافة الشحنات والتيارات إلى كثافة شحنات مرتبطة ρ_b وكثافة شحنات حرة ρ_f، وكذلك الأمر بالنسبة لكثافة التيار:

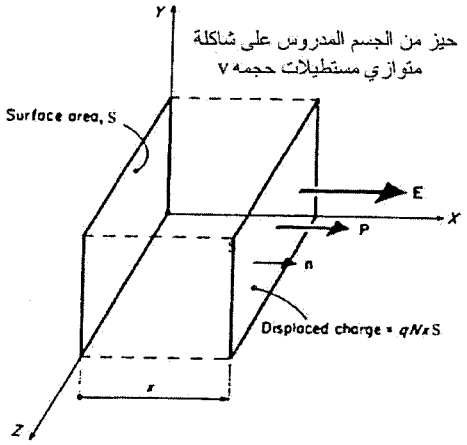
$$\rho = \rho_b + \rho_f; \tag{44.3}$$

$$J = J_b + J_f. \tag{45.3}$$

← **نعرّف** الآن **متجهة الاستقطاب** $\vec{P}(\vec{r},t)$، بأنها المتجهة التي تُحدد اتجاه تدفق الشحنات المرتبطة داخل الجزيئة في أية نقطة $(\vec{r},t)$.

← وتُمثل قيمة هذه المتجهة كمية الشحنة في وحدة السطح من الجزيئة التي تمر من النقطة $(\vec{r},t)$.

← وتُعبّر أيضاً عن **عدد ثنائيات الأقطاب الكهربائية المتشكلة في وحدة الحجم** من الجزيئة، أي كثافة عزم ثنائي القطب.



شكل (8.3)

ولدراسة الاستقطاب نتأمل حجماً ما V من مادة **عازلة**، الشكل (8). فعندما تُستقطب هذه المادة تحت تأثير حقل كهربائي خارجي في الاتجاه X مثلاً، يمكن أن نفترض أن تدفق الشحنة الداخل إلى الحجم يساوي تدفقها الخارج منه. ولذا، نأخذ سطحاً عنصرياً dS من السطح S، وندرس التدفق الذي يحدث عبره.

تعطى كثافة الشحنات السطحية σ_s التي تتدفق من السطح dS بالعلاقة التالية:

$$\sigma_s = \vec{P}\cdot\vec{n} = P_n\,, \tag{46}$$

حيث $\vec{n}$ متجهة الناظم على عنصر السطح dS الخارجة منه.

تُعدُّ كمية الشحنة التي تتدفق إلى خارج السطح كمية موجبة:

$$\Delta Q = \int_S \vec{P}\cdot\vec{n}dS\,. \tag{47}$$

وبما أن توزع الشحنات معتدل، فإن كمية الشحنات السالبة تبقى مصونة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$-\Delta Q = \int_V \rho_b dV, \tag{48.3}$$

حيث dV عنصر حجم يستند على عنصر السطح dS.

وبمقارنة العلاقتين (47) و (48) بعد تطبيق مبرهنة غاوس، نجد:

$$\vec{\nabla}.\vec{P} = -\rho_b. \tag{49.3}$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن كثافة الشحنات السالبة المقيدة ترتبط بتفرق متجهة الاستقطاب.

ونحصل على كثافة تيار الاستقطاب J_b في المادة العازلة من معادلة الاستمرار بى الآتية:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_b=-\frac{\partial\rho_b}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right)\ \Rightarrow\ \vec{J}_b=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}. \tag{50}$$

نلاحظ هنا، أن معدل التغير الزمني لمتجهة الاستقطاب يؤدي إلى وجود تيار الاستقطاب. ونُشير أيضاً، إلى أن كثافة الشحنات السطحية الكلية σ_t وكثافة الشحنات الحجمية الكلية ρ_t في المادة العازلة تعطى بالعلاقتين التاليتين:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\sigma_f+\sigma_b=\sigma_f+P_n;\\ \rho_t&=\rho_f+\rho_b=\rho_f-\vec{\nabla}.\vec{P}.\end{aligned}\right\} \tag{51.3}$$

نكتب الآن معادلات مكسويل في وسط مادي عازل غير مغنطيسي، وذلك بعد إدخال متجهة الاستقطاب:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}.\vec{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_b+\rho_f}{\varepsilon_0};\\ \therefore\vec{\nabla}\cdot&\left(\vec{E}+\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0};\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

وبنفس الطريقة نحصل من معادلة مكسويل الأولى على الصيغة الآتية:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{J}_b+\vec{J}_f+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};$$

$$\therefore\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{J}_f+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}+\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)=\vec{J}_f+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right); \tag{53}$$

تعبر جملة المعادلتين (52) و (53) عن معادلات مكسويل في الأوساط العازلة المستقطبة المتضمنة المتجهة $\vec{P}(\vec{r},t)$، وكثافة الشحنات المقيدة، وكثافة الشحنات الحرة. ونستنتج هنا أن التغير الزمني لمتجهة الاستقطاب يعتبر منبعاً لدوار الحقل المغناطيسي.

1.2- كمون ثنائي القطب الكهربائي Potential of The Electric Dipole:

لندرس توزعاً مستمراً ومحدوداً للشحنات $\rho(\vec{r})$ على الحجم V'، كما هو موضح في الشكل (9). ولنبحث عن الكمون $\phi(\vec{r})$ المتولد عن هذا التوزع في النقطة M. يعطى الكمون المتولد عن الشحنة dq في النقطة M بالعلاقة الآتية:

$$d\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{54.3}$$

وبالتالي، يكون الكمون الكلي المتولد عن كامل الحجم مساوياً:

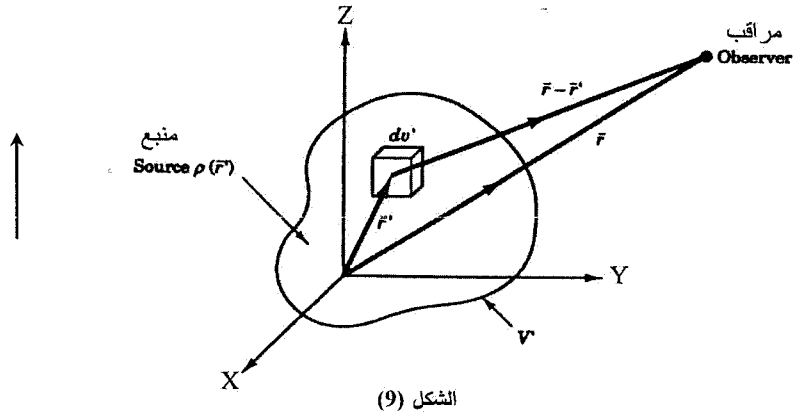
$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{55.3}$$

إذا فرضنا، أن $\vec{r}>>\vec{r}'$ يمكننا نشر التابع $f(\vec{r},\vec{r}')=|\vec{r}-\vec{r}'|$ حول النقطة $\vec{r}'=0$ وفقاً لسلسلة تايلور:

$$f(\vec{r},\vec{r}')=f(\vec{r},\vec{r}')_{\vec{r}'=0}+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{3}\left.\frac{\partial f(\vec{r},\vec{r}')}{\partial x_i}\right|_{\vec{r}'=0}x_i'+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{3}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(\vec{r},\vec{r}')\right|_{\vec{r}'=0}x_i'x_j'+..... \tag{56}$$

بإجراء عملية النشر للتابع مع الأخذ بالحسبان أنَّ $(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$ نجد:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}+\sum_{i=1}^{3}\frac{x_ix_i'}{r^3}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)x_ix_j'}{r^5}..... \tag{57}$$



الشكل (9)

وبتعويض العلاقة (57) في (55) نجد:

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r}+\frac{\vec{r}.\vec{P}}{r^3}++\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)}{r^5}\int_{V'}x_i'x_j'\rho(\vec{r}')dV'+\ldots\right] \quad (58.3)$$

حيث δ_{ij} رمز كرونكر:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & for \quad i\neq j\\ 1 & for \quad i=j\end{cases}$$

$$\therefore q=\int_{V'}\rho(\vec{r}')dV' \quad ; \quad \vec{P}=\int_{V'}\vec{r}'\rho(\vec{r}')dV'. \quad (59)$$

الشحنة الكهربائية المدروسة وعزم ثنائي القطب الكهربائي على الترتيب.

ولتسهيل كتابة العلاقة (58)، نضيف إليها كمية تساوي الصفر، وذلك بإضافة المقدار التالي:

$$\frac{1}{3!}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)}{r^5}\int_{V'}r'^2\delta_{ij}\rho(\vec{r}')dV'$$

نجد أن:

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r}+\frac{\vec{r}.\vec{P}}{r^3}+\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\left(3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right)}{r^5}\phi_{ij}\right]; \quad (60.3)$$

حيث ϕ_{ij} عزم رباعي الأقطاب الكهربائي.

$$\phi_{ij}=\int_{V'}\rho(\vec{r}')\left(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij}\right)dV'. \quad (61.3)$$

- يمثل الحد الأول من العلاقة (60) كمون كولون لشحنة نقطية q موجودة في نقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات) $\vec{r}'=0$ أو بمعنى آخر مجموع الشحنات،
- ويمثل الحد الثاني كمون ثنائي القطب الكهربائي الذي يتناسب مع المقدار $\frac{1}{r^3}$، مما يعني أنه يتناقص بشدة أكبر من تناقص كمون كولون الذي يتناسب مع المقدار $\frac{1}{r}$.
- والحد الثالث يحتوي على عزم رباعي القطب الكهربائي.

وبعد أن حصلنا على كمون ثنائي القطب الكهربائي، يمكننا بسهولة إيجاد حقله الكهربائي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}.\vec{P}}{r^3}\right),$$

بالتالي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\vec{r}\cdot\vec{P})\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{P})\right].$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{P}) = \vec{P} \quad ; \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4}\vec{e}_r \quad ; \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

وبالتعويض نحصل على علاقة الحقل الكهربائي لثنائي القطب الكهربائي:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3\left(\vec{P}\cdot\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \vec{P}\right].} \qquad (62)$$

نستنتج من هذه العلاقة، أن الحقل الكهربائي لثنائي القطب الكهربائي يتناسب عكساً مع المقدار r^3، أي أن شدة الحقل هنا أخفض من شدة الحقل الكهراكدي الذي يتناسب عكساً مع r^2. ثم إن الحقل $\vec{E}(\vec{r})$ يعتمد على الزاوية التي يصنعها العزم $\vec{P}$ مع متجهة الموضع $\vec{r}$.

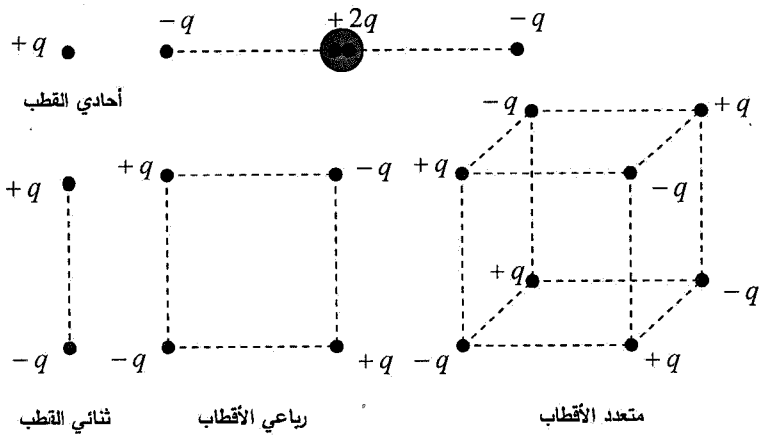
2.2- رباعي الأقطاب الكهربائي Quadropole Electric Dipole:

ينتج رباعي القطب الكهربائي ϕ_{ij} عن الجمل اللامتناظرة كروياً (أي أن توزع الشحنات ليس كروياً). ويُعرّف بأنه جملة مؤلفة من ثنائيي قطبين كهربائيين متساويين بالقيمة، عزم كل منهما $\vec{P}$، ومختلفان بالاتجاه، الشكل (9). نُشير هنا إلى، أنه يمكننا تصور نماذج مختلفة لمتعددات الأقطاب الكهربائية.

→ إذ أن أبسط نموذج لأحادي القطب هو الشحنة النقطية.

→ في حين أن ثنائي القطب عبارة عن جملة مؤلفة من شحنتين متساويتين بالقيمة مختلفتين بالإشارة.

→ وأبسط نموذج لرباعي الأقطاب الكهربائي يُمثل بأربع شحنات متوضّعة على رؤوس متوازي أضلاع، شرط أن تكون هذه الشحنات متساوية بالقيم ومتناوبة بالإشارة عند الدوران على رؤوس متوازي الأضلاع المفترض، الخ، الشكل (9).



الشكل (9)

من الناحية الرياضية، يُعبّر عن رباعي الأقطاب بتنسور من المرتبة الثانية:

$$\phi_{ij}=\begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23}\\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33}\end{pmatrix}. \qquad (63.3)$$

وبسهولة يمكن أن نجد:

$$\phi_{11}+\phi_{22}+\phi_{33}=0.$$

إذا كانت الشحنات موزعة توزعاً كروياً، فإن $\phi_{ij}=0$. والنوى التي من أجلها $\phi_{ij}=0$، تكون كروية. إذ تُبين التجارب أن للنوى الثقيلة شكلين تبعاً لإشارة المقدار ϕ_{ij}. فمن أجل $\phi_{ij}>0$ تكون النوى متطاولة الشكل، أما من أجل $\phi_{ij}<0$ فتكون مفلطحة الشكل.

وعندما يخضع ثنائي القطب الكهربائي إلى حقل كهربائي منتظم، فإنه لا يتأثر بأية قوة. ويمكننا تفسير ذلك بالشكل الآتي: تساوي القوة المطبقة على ثنائي القطب مجوع قوى كولون المؤثرة على الشحنتين $+q$ و $-q$:

$$\vec{F}=q\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})-q\vec{E}(\vec{r}). \qquad (64.3)$$

نطبق سلسلة تايلور على التابع $\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})$ بفرض أن $\vec{r}>>\vec{a}$:

$$\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})=\vec{E}(\vec{r})+(\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) \qquad (65.3)$$

وبتعويض العلاقة (65) في (64) نجد:

$$\vec{F}=(\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}).$$

ولكن في الحقل الكهربائي المتجانس المنتظم تتحقق العلاقة $\vec{\nabla}.\vec{E}=0$، مما يعني أن محصلة القوى المؤثرة على ثنائي القطب تساوي الصفر. وإذا لم يكن الحقل المذكور منتظماً، فإن محصلة القوى المؤثرة على ثنائي القطب لا تساوي الصفر. ونحصل على عبارة القوة من تدرج الطاقة الكامنة، أي من العلاقة $\vec{F}=\vec{\nabla}U$.

3.2- عزم الدوران المطبق على ثنائي القطب الكهربائي Torque on an Electric Dipole:

يُعطى عزم الدوران بالنسبة لمبدأ الإحداثيات بالعلاقة التالية:

$$\vec{M}_e=(\vec{r}+\vec{a})\wedge\vec{F}_{+}+\vec{r}\wedge\vec{F}_{-};$$

$$\vec{M}_e=q(\vec{r}+\vec{a})\wedge\vec{E}(\vec{r}+\vec{a})-q\vec{r}\wedge\vec{E}(\vec{r}). \qquad (66.3)$$

حيث $\vec{F}_{+}$ و $\vec{F}_{-}$ القوتان المؤثرتان في الشحنتين الموجبة والسالبة على الترتيب.

وباستخدام العلاقة (65) تأخذ العلاقة الأخيرة الشكل:

$$\vec{M}_e=\vec{P}\wedge\vec{E}+\vec{r}\wedge(\vec{P}.\vec{\nabla})\vec{E}. \qquad (67.3)$$

إذاً، تتألف علاقة العزم الدوراني المطبق على ثنائي القطب من حدين وينعدم الحد الثاني، عندما يكون الحقل الكهربائي المطبق منتظماً. ومن ثمَّ:

$$\vec{M}_e=\vec{P}\wedge\vec{E}. \qquad (68.3)$$

إذا كان $\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{P}$ نحصل على القيمة الدنيا للطاقة الكامنة (وضع الاستقرار).

4.2- طاقة التأثير المتبادل بين ثنائي القطب والحقل الكهربائي:

Interaction Energy between the Dipole and Electric Field

تُعرّف طاقة لتأثير المتبادل بين شحنة نقطية q وحقل كهربائي خارجي $\vec{E}$، بأنها عمل القوة الخارجية اللازم صرفه أو استهلاكه لنقل الشحنة q من اللانهاية $\phi(\infty)=0$ إلى الموضع $\vec{r}$، وتُعطى بالعلاقة التالية:

$$U_e = q\phi(\vec{r}+\vec{a}) - q\phi(\vec{r});$$
$$U_e = q(\vec{a}.\vec{\nabla})\phi(\vec{r}) = -\vec{P}.\vec{E}(\vec{r}). \qquad (69.3)$$

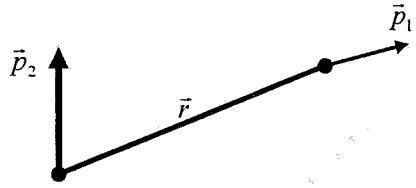
- تأخذ طاقة التأثير المتبادل U_e قيمة صغرى، عندما يكون ثنائي القطب في وضع الاستقرار، أي عندما $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$.
- وتأخذ قيمة عظمى، عندما يكون ثنائي القطب في وضع التوازن غير المستقر، أي عندما $\vec{P} \uparrow\downarrow \vec{E}$.
- وعند الانتقال من الحالة الموجبة إلى الحالة السالبة، تكون طاقة التأثير المتبادل U_e مساوية الصفر، مما يعني عدم وجود تأثير متبادل بين ثنائي القطب والحقل الخارجي.
- وتدل الإشارة السالبة على أن العزم الخارجي المؤثر على الديبول يعاكس اتجاه العزم الناتج عن الحقل.
- ويُختزن العمل الخارجي اللازم لفتل ثنائي القطب على شاكلة طاقة كامنة كهربائية، بحيث لا يوجد تغير في الطاقة الحركية.

5.2- طاقة التأثير المتبادل بين ثنائيي قطب Interaction Energy between Two Dipole:

لنأخذ ثنائيي قطب $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$، كما في الشكل (10.3)، تفصل بينهما المسافة $\vec{r}$. ولنتذكر، أن الحقل الكهربائي لثنائي القطب يعطى بالعلاقة (62). تكون بالتالي طاقة التأثير المتبادل بين $\vec{E}_1$ الناتج عن $\vec{P}_1$ في ثنائي القطب $\vec{P}_2$، وبالعكس كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} U_{12} &= -\vec{P}_2.\vec{E}_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[\vec{P}_1.\vec{P}_2 - 3(\vec{P}_1.\vec{e}_1)(\vec{P}_2.\vec{e}_2)\right]; \\ U_{21} &= -\vec{P}_1.\vec{E}_2(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[\vec{P}_2.\vec{P}_1 - 3(\vec{P}_2.\vec{e}_2)(\vec{P}_1.\vec{e}_1)\right], \end{aligned}\right\} \qquad (70.3)$$

حيث $\vec{e}_i = \dfrac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$.



شكل (10.3)

نستنتج من هاتين العلاقتين، أن طاقة التأثير المتبادل بين الثنائيين لا تتعلق فقط بالبعد $\vec{r}$، وإنما بالزاوية المتشكلة بين $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$. وهذا النوع من القوى يختلف عن القوى المركزية التي تتعلق بالبعد r فقط، كقوى كولون وقوى الجاذبية، حيث $F \sim 1/r^2$.

لنناقش الآن المعادلة (70): تكون الجملة المؤلفة من ثنائيي قطب في حالة استقرار، عندما تكون طاقتها الكامنة أصغر ما يمكن، أي عندما $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ متوازيين $(\vec{P}_1 \uparrow\uparrow \vec{P}_2)$. وتكون الجملة في حالة غير مستقرة، أي الحالة التي تكون عندها طاقتها الكامنة عظمى، إذا كان $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ متعاكسين $(\vec{P}_1 \uparrow\downarrow \vec{P}_2)$. وفيما يلي نبين الحالات المختلفة لوضعيي $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ بالنسبة للمسافة الفاصلة بينهما، ونوضح ذلك بالأشكال الأربعة المبينة أدناه، والمعادلات الآتية:

مكتبة A to Z