كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : كهرطيسية

المحاضرة : ١+٢+٣/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

الحقل الكهرطيسي

الحقل الكهرطيسي ومعادلات مكسويل

The Electromagnetic Field and Maxwell's Equations

يُفهم من الحقل الكهرطيسي الارتباط المستمر للحقول الكهربائية والمغنطيسية المتغيرة بالنسبة للزمان والمكان (الزمكان). وقد تأسست نظرية الحقل الكهرطيسي على أربع معادلات أساسية شهيرة تُعرف بمعادلات مكسويل وعلى بعض العلاقات المادية التي تظهر خواص الوسط المدروس.

سنقوم في هذا الفصل بشرح معادلات مكسويل التي يمكن استخدامها في العديد من التطبيقات، لا سيما الأمواج الكهرطيسية. وكما هو معروف يمتد طيف الأمواج الكهرطيسية المدروسة تجريبياً من الترددات التي مرتبتها 10^4 Hz حتى الترددات التي مرتبتها 10^{20} Hz.

ويشمل طيف الأمواج الكهرطيسية موجات الراديو والتلفزيون والأمواج الميكروية والأمواج الضوئية والإشعاع الحراري والأشعة السينية X وأشعة غاما γ.

1- معادلات مكسويل: Maxwell's Equations

تربط معادلات مكسويل بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي المتغيرين بالنسبة للزمن مع بعضهما البعض من جهة، ومع الشحنات والتيارات الكهربائية الموجودة في الوسط المدروس من جهة أخرى.

وتوجد أربع معادلات شهيرة لمكسويل تكتب بالشكل التفاضلي الآتي:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{J}(\vec{r},t)+\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t};\qquad \text{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};\tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t};\qquad \text{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\qquad \text{div}\,\vec{D}=\rho\tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0;\qquad \text{div}\,\vec{B}=0;\tag{4}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E};\qquad \vec{B}=\mu\vec{H};\qquad \vec{J}=\sigma\vec{E}.\tag{5}$$

حيث ρ كثافة الشحنات الحجمية، و $\vec{J}$ كثافة التيارات السطحية **للوسط المادي** المدروس،

و σ ناقلية الكهربائية النوعية،

و ε سماحية العازلية الكهربائية، و μ ونفاذية المغنطيسية.

سنقوم الآن بتفسير المعادلات السابقة ومطابقة كل منها مع النتائج التجريبية الموافقة.

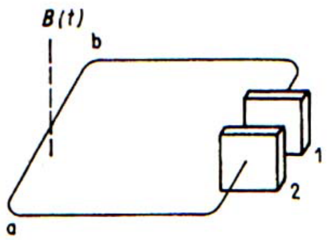
دراسة الشكل التفاضلي لمعادلة مكسويل الأولى:

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}\,;$$

هي تعميم لقانون **أمبير** في المغنطيسية الذي حصل عليه مكسويل نتيجة دراساته النظرية. وينص قانون آمبير بشكله التفاضلي على أن **جولان الحقل المغنطيسي حول محيط مغلق يساوي إلى تيار الناقلية** I_c.

إيجاد الشكل التكاملي لمعادلة مكسويل الأولى ودراسته:

نأخذ دارة كهربائية مؤلفة من سلك ناقل ومكثفة مستوية سعتها C بحيث تكون المسافة الفاصلة بين لبوسيها صغيرة للحصول على حقل كهربائي **متجانس**. ثم نضع الدارة الكهربائية في **حقل تحريض مغنطيسي متغير مع الزمن** $\vec{B}(t)$، كما في الشكل المجاور.



بتطبيق مبرهنة **ستوكس** على المعادلة الأولى نجد:

$$\int_S \left(\vec{\nabla}\Lambda\vec{\mathrm{H}}\right)\cdot d\vec{S} = \int_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_c\cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}_d\cdot d\vec{S}\,;$$

ومن ثمَّ

$$\int_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \left(\vec{J}_c + \vec{J}_d\right)\cdot d\vec{S}\,;$$

حيث $\vec{J}_c$ كثافة تيار الناقلية و $\vec{J}_d = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ كثافة تيار الإزاحة، ومن ثمَّ:

$$\oint_C \vec{\mathrm{H}}.d\vec{l} = I_c + I_d \qquad (6)$$

حيث I_c تيار الناقلية المتدفق في سلك الدارة و I_d تيار الإزاحة الناتج بين لبوسي المكثفة.

إذاً، كثافة التيار الكلية $\vec{J}_{tot}$ تساوي مجموع كثافتي تيار الناقلية وتيار الإزاحة:

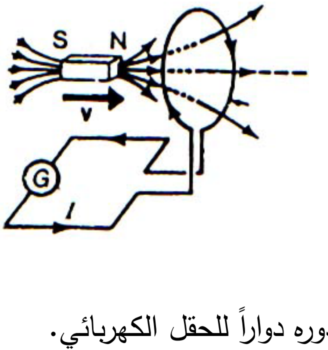
$$\boxed{\vec{J}_{tot} = \vec{J}_c + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_c + \dot{\vec{D}}\,.} \qquad (7)$$

تدل معادلة مكسويل **الأولى** على أن تغير الحقل الكهربائي بالنسبة للزمن يولد حقلاً مغناطيسياً دواراً، إلى جانب تيار الناقلية.

دراسة الشكل التفاضلي لمعادلة مكسويل الثانية:

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}}$$

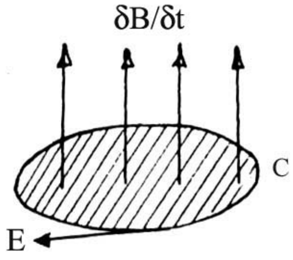
تُعبّر المعادلة **الثانية** عن الشكل التفاضلي لقانون **فارادي** في التحريض الكهرطيسي. لقد أظهرت تجارب كولون في الكهرباء الساكنة، أن الشحنات الساكنة تتآثر فيما بينها بقوى كهربائية تعطى قيمتها بقانون كولون، وهذا دليل واثبات على وجود حقل كهربائي ناتج عن الشحنات الساكنة. على غرار ذلك، بينت تجارب أمبير أن التيارات الكهربائية التي تجري في سلك ناقل حلقي (لولبي) **تتآثر** فيما بينها **بقوى** تعطى شدتها بقانون أمبير، مما يدل على وجود حقل مغنطيسي **ناتج من حركة** الشحنات الكهربائية في السلك.



ومن جهة أخرى، أظهرت تجارب **فارادي** أن تغير الحقل المغنطيسي بالنسبة للزمن يولّد في سلك مغلق متوضّع في هذا الحقل **تدفقاً للتيار المتحرض** في هذا السلك، الذي **يولّد** بدوره دواراً للحقل الكهربائي.

إيجاد الشكل التكاملي لمعادلة مكسويل الثانية و دراسته:

لنأخذ عروة من سلك ناقل مغلق، C، تُحدد سطحاً مفتوحاً، S، كما في الشكل المجاور. ولنطبق مبرهنة **ستوكس** على معادلة مكسويل الثانية فنجد:



$$\int_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) \cdot \vec{n} dS = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \; .$$

$$\therefore \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \Phi_m \; ,$$

حيث $d\vec{l}$ عنصر طولي من السلك الناقل، و $\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \Phi_m$ تدفق خطوط الحقل المغنطيسي خلال السطح S، **ويمثل الطرف الأيسر** لهذه المعادلة **القوة المحركة الكهربائية** التي تولّد التيار المتحرض في الدارة، إذاً:

$$U_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \qquad (8)$$

$$\boxed{U_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.} \qquad (9)$$

أضف إلى ذلك، عندما **لا يتغير** الحقل المغنطيسي **لا يتدفق** التيار في السلك. ولقد **استنتج فاراداي** من ذلك، أن **تغيّر** الحقل المغنطيسي بالنسبة للزمن **يولد** قوة كهربائية تؤثر على الشحنات، مما يؤكد أن الحقل المغنطيسي المتغير زمنياً يُنتج حقلاً كهربائياً.

ينص قانون فاراداي بصيغته التكاملية على أن جولان الحقل الكهربائي حول مسار مغلق C يساوي المعدل الزمني لتغير التدفق المغنطيسي أو سرعة تدفق حقل التحريض المغنطيسي عبر السطح المُحَدْ بالمسار C:

نلاحظ أن المشتق الزمني في المعادلة (8) يؤثر على المقدار الموجود داخل إشارة التكامل. بالتالي، نستطيع أن نحصل على جولان الحقل $\vec{E}$ **إمّا** بتغير تدفق $\vec{B}$ **وإمّا** بتغير السطح S أو كليهما معاً. في هذه الحالة ندعو $\vec{E}$ بالحقل الكهربائي **المتحرض.**

وينتج من المعادلة (8) أن الحقل الكهربائي الناتج عن الحقل المغنطيسي المتغير زمنياً يساوي العمل الذي يقوم به الحقل حول مسار مغلق C لكل وحدة شحنة.

وهنا، يجب أن نميز بين حالتين:

الحالة الأولى:

إذا **ازداد** معدل التدفق مع مرور الزمن يكون المقدار $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ **سالباً**، مما يعني أن الحقل $\vec{E}$ الناتج عن زيادة التدفق يعمل بعكس اتجاه التيار المار في المحيط C. وهذا التيار يولّد بدوره حقلاً تحريضياً مغناطيسياً باتجاه معاكس للحقل الذي سببه.

الحالة الثانية:

أمّا إذا **انخفض** معدل تدفق حقل التحريض المغنطيسي يصبح المقدار $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ **موجباً**، مما يعني أن الحقل $\vec{E}$ الناتج عن نقصان كثافة التدفق يعمل باتجاه التيار المار في السلك C الذي يولّد بدوره حقلاً مغناطيسياً باتجاه الحقل المسبب له.

إذاً، تُشير الإشارة السالبة إلى أن الحقل الكهربائي المتحرض يعاكس التدفق المغنطيسي الذي سببه؛ تُعرف هذه الحقيقة **بقانون لنز** Lenz، الذي ينص على أنه يتولّد في الناقل تياراً كهربائياً متحرضاً، حقله المغنطيسي يعاكس في الاتجاه الحقل المغنطيسي المُسبب له. فحسب المعادلة (2)، إذا مُثِّلت خطوط الحقل $\partial\vec{B}/\partial t$ بخطوط مستقيمة من الأسفل إلى الأعلى، فإن **خطوط الحقل الكهربائي** تشكل **دوائر متحدة المركز** تضم داخلها هذه الخطوط، كما في الشكل الموضح أعلاه.

إذا تحققت العلاقة $\operatorname{rot}\vec{E}=0$، فإننا ندعو $\vec{E}$ حقلاً محافظاً (أي يمكن تعيين تابع كمون له)، ويكون جولانه على أي منحني مغلق معدوم.

دراسة الشكل التفاضلي معادلة مكسويل الثالثة: $\operatorname{div}\vec{D}\equiv\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$

تربط معادلة مكسويل الثالثة بين الحقل الكهربائي $\vec{E}$ **ومنبع** الحقل الشحنات الكهربائية الحقيقية الموجودة في الطبيعة. وتمثل هذه المعادلة قانون **غوص** Gauss بالشكل التفاضلي، كما تُعبّر عن شكل آخر لقانون كولون.

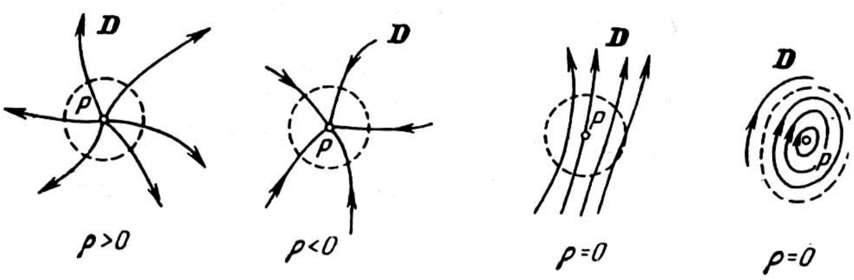
وباستخدام المعادلة المادية $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ تأخذ المعادلة **الثالثة** الشكل $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon$ وتنص على أن **تفرق** الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في نقطة ما **يساوي** لكثافة الشحنات الحجمية ρ المتوضعة في هذه النقطة مقسومة على ε.

نناقش هنا ثلاث حالات لهذه المعادلة تبعاً لإشارة كثافة الشحنات الحجمية وهي:

أولاً– $\rho=0$ تمثل الأوساط المعتدلة كهربائياً، هذا من جهة. ومن جهة أخرى، **يُعبّر التفرق** عن عدد خطوط الحقل التي تخترق سطحاً مغلقاً مطروحاً منه عدد خطوط الحقل الداخلة إليه. فإذا كانت خطوط الحقل الخارجة يساوي خطوط الحقل الداخلة، فإن $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$ أو أن خطوط الحقل تكون مغلقة حول السطح المغلق، كما هو الحال في الحقول المتغيرة مع الزمن، الشكل (a).

ثانياً– $\rho<0$ تعبّر عن **الأيونات السالبة**، أي أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}<0$. مما يعني أن الشحنات السالبة هي بمثابة مصارف لخطوط الحقل، أي أن خطوط الحقل تنتهي على الشحنة السالبة، الشكل (b).

ثالثاً– $\rho>0$ تعبر عن **الأيونات الموجبة**، أي أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}>0$ وتعني أن الشحنات الموجبة هي بمثابة منابع لخطوط الحقل المنطلقة منها، الشكل (c).



شكل (c)   شكل (b)   شكل (a)

الشكل التكاملي لمعادلة مكسويل الثالثة:

لنأخذ سطحاً غوصياً مغلقاً S يُحددُ حجماً V تتوزع فيه شحنة Q بكثافة حجمية ρ ثم نطبق مبرهنة **غوص** على المعادلة الأولى فنجد:

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{D}\,dV=\int_V \rho\,dV\;; \qquad \text{ومن ثَمَّ} \qquad \oint_S \vec{D}.d\vec{S}=Q.$$

حيث $d\vec{S}$ متجه طويلته تساوي **لعنصر السطح** dS من السطح S، و Q الشحنة الكلية المحتواة داخل السطح المغلق S.

يمكن التعبير عن عنصر متجه السطح بالشكل: $d\vec{S} = \vec{n}dS$، حيث $\vec{n}$ متجه الواحدة الناظمي على عنصر السطح والخارج منه، إذاً:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}. \qquad (10)$$

يمثل الطرف الأيسر من هذه المعادلة التدفق الكلي للحقل $\vec{E}$ من خلال السطح المغلق S، أي:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}. \qquad (11)$$

وتعبّر هذه العلاقة عن قانون **غوص**، الذي ينص على أن تدفق متجهة الحقل الكهربائي من خلال أي سطح مغلق S يساوي الشحنة الكلية Q المتوضعة داخل هذا السطح مقسومة على ε.

إذا كان الحقل $\vec{E}$ منتظماً، أي خطوطه متوازية وشدته واحدة في جميع نقاط الوسط، فإن تدفق خطوط الحقل من خلال سطح مغلق يعطى بالعلاقة:

$$\Phi_e = \vec{E}.\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}. \qquad (12)$$

وكما مرّ معنا في مقرر الكهرباء والمغنطيسية، فإن الخطوط المنحنية للحقل الكهربائي، التي تمس في كل نقطة من نقاطه متجه الحقل في هذه النقطة، تبدأ من الشحنة الموجبة وتنتهي في الشحنة السالبة. والسؤال الذي يطرح نفسه، كيف تصبح معادلة مكسويل الثالثة من أجل كثافة الشحنات السطحية والخطية والنقطية ؟ للإجابة على هذا السؤال يجب العودة إلى تابع ديراك أو التابع النبضي.

دراسة معادلة مكسويل الرابعة:

بمقارنة المعادلة (3) مع المعادلة (4) نجد أن تفرق الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يختلف عن تفرق الحقل المغنطيسي $\vec{B}$، مما يعني وجود اختلاف في منابع الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$؛ فمنابع $\vec{E}$ شحنات نقطية، وهي حالة غير محققة بالنسبة للحقل $\vec{B}$. بتعبير آخر، **لا توجد شحنات مغنطيسية حقيقية** على غرار ما هو عليه الحال بالنسبة للشحنات الكهربائية، وخطوط الحقل المغنطيسي ليس لها بداية وليس لها نهاية، **وإنما تنغلق على نفسها**، مما يعني أن خطوط الحقل المغنطيسي **مستمرة وتتجه** من القطب الشمالي إلى القطب الجنوب دوماً.

والمعنى الفيزيائي للمعادلة (3) يدل على عدم وجود شحنات مغنطيسية حقيقية حرة في الطبيعة، فالتيارات هنا هي التي تولّد الحقول المغنطيسية. ويمكن أن نقول في هذا الإطار، أن التيار المغنطيسي وهميٌ، وحتى الشحنات المغنطيسية وهمية، أي أن الشحنات المغنطيسية **غير مستقلة** عن بعضها البعض؛ إذْ لا توجد شحنات سالبة أو موجبة بحيث تكون معزولة عن بعضها البعض، أي أن التيار المغنطيسي دائماً ثنائي القطبية.

الشكل التكاملي لمعادلة مكسويل الرابعة ودراسته:

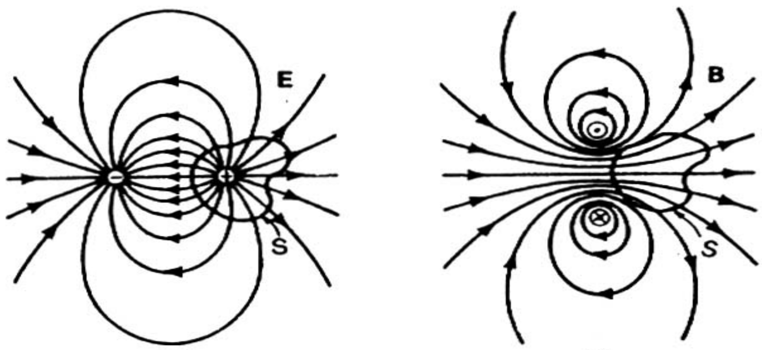
نعلم من المغنطيسية المستمرة أن تدفق الحقل $\vec{B}$ من خلال سطح مغلق يساوي الصفر، مما يعني أن تكامل المركبة الناظمية للحقل $\vec{B}$ على السطح يساوي الصفر: $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}ds = 0$

بتطبيق مبرهنة غوص على المعادلة الأخيرة نجد:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}dV = 0\,; \qquad \text{ومن ثَمَّ} \qquad \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (13)$$

نستنتج من المعادلة (13) أن تدفق حقل التحريض المغنطيسي من خلال سطح مغلق يساوي الصفر، مما يعني أن عدد خطوط حقل التحريض المغنطيسي التي تدخل الحجم المحدود بالسطح المغلق S يساوي عدد خطوط الحقل التي تخرج منه. واصطلاحاً يكون **التدفق من خلال سطح مغلق موجباً** إذا كانت خطوط الحقل تخرج منه **وسالباً** إذا دخلت إليه.

يُوضح الشكلان (a) و (b) خطوط الحقل الكهربائي لثنائي قطب كهربائي وخطوط الحقل المغنطيسي لثنائي قطب مغنطيسي، وسطح غوص لكل منها على الترتيب.



(a) (b)

على الصعيد **الماكروسكوبي** ينشأ ثنائي القطب المغنطيسي بسبب مرور تيار مستمر في سلكٍ على شاكلة حلقة ناقلة. وعلى الصعيد **الميكروسكوبي** أو الذري يتولد ثنائي القطب المغنطيسي من دوران الإلكترونات حول نواة الذرة وحول نفسها في الذرة. ويدعى عزم ثنائي القطب المغنطيسي للإلكترون بمغناتون بور $\mu_B = 9.27\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$.

أخيراً، نلاحظ أن معادلات مكسويل ترتبط مع بعضها البعض وتشكل جملة متكاملة من المعادلات، إذ يمكننا الحصول على إحداها انطلاقاً من الأخرى بالتأثير عليها **بالمؤثر نابلا** $\vec{\nabla}$. فمثلاً، تنتج المعادلة الرابعة من المعادلة الثانية بعد التأثير عليها سلمياً بالمؤثر $\vec{\nabla}$، وكذلك بالتأثير السلمي على المعادلة الأولى بالمؤثر $\vec{\nabla}$ نحصل على الثالثة. والجدول الآتي يلخص معادلات مكسويل بشكلها التفاضلي والتكاملي:

الشكل التفاضلي	**الشكل التكاملي**	**العلاقة المكافئة**
$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_d$	$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = I_c + I_d$	قانون آمبير المعمم
$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\varepsilon = \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\dfrac{\partial\Phi_m}{\partial t}$	قانون فاراداي
$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = Q$	قانون غوص في الكهرباء الساكنة
$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$	قانون غوص في المغنطيسية

2- معادلة الاستمرار Continuity Equation:

تُعبّر معادلة الاستمرار عن قانون مصونية الشحنة؛ بمعنى أن الشحنة الكهربائية محفوظة فلا تُخلق ولا تُفنى عند جريان التيار. من أجل الحصول على الصيغة التفاضلية نؤثر سلمياً على معادلة مكسويل الأولى:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{0}=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\rho};$$

وبما أنَّ $\vec{\nabla}$ و $\dfrac{\partial}{\partial t}$ مؤثرين مستقلين، يمكن إجراء التبادل بينهما، والحصول على معادلة الاستمرار بالصيغة التالية:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\,.} \tag{14}$$

في حالة التيار المستمر لا يتغير توزع الشحنات بالنسبة للزمن ويكون ثابتاً. وبالتالي تأخذ معادلة الاستمرار الشكل $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$، مما يعني أن كثافة تدفق التيار معدومة. أي لا يمر التيار المستمر في الدارة المفتوحة. أما في الحالة اللامستقرة، التيار المتناوب في دارة تحوي مكثفة، فإن خطوط كثافة التيار تكون مغلقة، وكأن التيار المتناوب عمل على إغلاق الدارة التي كانت مفتوحة بوجود المكثفة وذلك بواسطة تيار الإنزياح المار في المكثفة:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{J}_c+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})=0. \tag{15}$$

3- معادلة قوة لورانتس Lorentz Force Equation:

نميز هنا بين قوى الشحنات الساكنة وقوى الشحنات المتحركة (التيارات):

الحالة الأولى:

تتأثر الشحنات الساكنة المتجاورة فيما بينها بقوى كهربائية تعطى بقانون كولون الآتي:

$$\vec{F}_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\vec{u}, \tag{16}$$

حيث r المسافة الفاصلة بين الشحنتين النقطيتين q_1 و q،

و $\vec{u}=\vec{r}/|\vec{r}|$ متجه الواحدة،

و $\varepsilon_0=9\times10^{-9}$ F/m السماحية الكهربائية للخلاء.

ونلاحظ هنا أن قوى التجاذب بين الأيونات تتناقص بازدياد العازلية الكهربائية للوسط المادي المدروس عدا الخلاء. فعلى سبيل المثال ينحل ملح الطعام عند وضعه في الماء، بسبب نقصان قوى التجاذب بين شوارد الملح. ويعود ذلك، إلى أن عازلية الماء كبيرة، إذ تبلغ $\varepsilon_r=80$.

الحالة الثانية:

حسب قانون آمبير يُولَّد في سلك ناقل مغلق حقل تحريض مغنطيسي $\vec{B}$ يؤثر بدوره على شحنة متحركة بسرعة $\vec{\upsilon}$ في سلك ناقل آخر مجاور له. وتعطى هذه القوة بالعلاقة:

$$\vec{F}_m=q\vec{\upsilon}\wedge\vec{B}. \tag{17}$$

ندعو محصلة القوتين $\vec{F}_e$ و $\vec{F}_m$ بقوة لورانتس $\vec{F}_L$. وهذا يعني، أن الشحنة q تتحرك في حقل كهرطيسي:

$$\vec{F}_L=\vec{F}_e+\vec{F}_m=q\vec{E}+q\vec{\upsilon}\wedge\vec{B}. \tag{18}$$

حيث تعمل القوة الكهربائية على جر الشحنة q بحركة انسحابية، في حين تعمل القوة المغنطيسية على حرف الشحنة (تغير مسارها) وفقاً لمسارٍ دائري. مما يعني أنه ليس للقوة المغنطيسية عملاً، لأنها عمودية على مسار حركة الشحنة.

4.1.2- جريان أو انتقال الاستطاعة في الحقل الكهرطيسي (متجهة بوينتنغ):

Power Flow in an Electromagnetic Field (The Poynting Vector)

سنقوم في هذه الفقرة بصياغة أحد أهم القوانين الفيزيائية في التحريك الكهربائي– **قانون مصونية طاقة الحقل الكهرطيسي** و**تفسير متجهة بوينتنغ**.

لهذه الغاية، ندرس شحنة نقطية q متحركة بسرعة $\vec{\upsilon}$ في حقل كهرطيسي موصوف بالحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$. طبقاً لمعادلة لورانتس تخضع هذه الشحنة إلى القوة التالية:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{\upsilon} \wedge \vec{B}).$$

تنجز هذه القوة عملاً dW لإزاحة هذه الشحنة مسافة لا متناهية في الصغر $d\vec{l}$:

$$dW = \vec{F}_L \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{\upsilon} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} + q\,(\frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot \vec{\upsilon} dt.$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{\upsilon} = \vec{F}_e . \vec{\upsilon}\,.} \qquad (19)$$

ليكن لدينا توزع حجمي للشحنات بكثافة ρ ، يحوي عندئذٍ كل عنصر حجمي لامتناهي في الصغر dV من الحجم الكلي شحنة قدرها $\rho\, dV$. تأخذ علاقة استطاعة الحقل، اللازم لتحريك الشحنة الشكل

$$dP_d = \frac{dW}{dt} = \rho \vec{E} \cdot \vec{\upsilon} dV = \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

بالمكاملة على كامل الحجم نحصل على الاستطاعة الكلية التي يصرفها الحقل لنقل الشحنة وتساوي:

$$\boxed{P_d = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV\,.} \qquad (20)$$

من جهة أخرى، تقود معادلات مكسويل إلى معادلة مصونية الطاقة الكهرطيسية.

نضرب معادلة مكسويل الأولى بالحقل $\vec{E}$ **سلمياً**، فنجد:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

بالاستفادة من المطابقة الشهيرة:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}\right) - \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{b}\right)$$

نجد أنَّ:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right) = \vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \cdot \vec{J} - \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

وبالاستفادة أيضاً من العلاقتين:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{H}\right) \qquad \& \qquad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}\right)$$

نجد أن:

$$\boxed{-\vec{\nabla} . (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{E} . \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2\right).}$$

وبعد المكاملة على كامل الحجم V نحصل على العلاقة التالية:

$$-\oint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})\, dV = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2\right) dV\,.$$

ويتطبيق مبرهنة غوص على الطرف الأيسر من المعادلة السابقة، مع الأخذ بعين الاعتبار **تعريف متجهة بوينتنغ**، $\vec{S}$ بالعلاقة:

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}\,,} \tag{21}$$

حيث تُقاس بوحدة القياس واط على متر مربع، $[\vec{S}] = \left(\mathrm{W/m^2}\right)$،

تؤول المعادلة التكاملية الأخيرة إلى الشكل الآتي:

$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2)\, dV. \tag{22}$$

بالتعريف تشير الإشارة السالبة للتدفق إلى **تدفق** الطاقة الكهرطيسية **الداخل** الى الحجم V المحدود بالسطح المغلق S في وحدة الزمن، **في حين تُشير الإشارة الموجبة** إلى **تدفق** الطاقة الكهرطيسية **الخارج** من الحجم V المحدود بالسطح S.

وبناءً على ذلك، نستنتج من المعادلة (22) أن **تدفق** الطاقة الكهرطيسية **في وحدة الزمن الذي يدخل** إلى السطح S المدروس (الطرف الأيمن من المعادلة 22) **يساوي** إلى تزايد الطاقة الكهرطيسية في وحدة الزمن (الحد الثاني في الطرف الأيمن من المعادلة 22) مضافاً إليها الطاقة الضائعة في وحدة الزمن بفعل جول (الحد الأول في الطرف الأيمن من المعادلة 22). وبالتالي، **تعبّر المتجهة $\vec{S}$ عن تدفق الطاقة الكهرطيسية في نقطة ما من السطح المغلق**. بمعنى آخر **تعبّر عن الاستطاعة** (القدرة) **المنقولة بواسطة الموجة الكهرطيسية**، عندما تجتاز سطحاً ما من جهة إلى أخرى.

تُعرّف كثافة الطاقة الكهرطيسية، w، بالعلاقة:

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) \quad ; \quad [w] == \mathrm{J/m^3} \tag{23}$$

يُعطى تدفق الطاقة الكهرطيسية في منطقة **لا تحتوي** شحنات وتيارات بالعلاقة:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2\right) = -\frac{\partial w}{\partial t}.} \tag{24}$$

وهذه العلاقة تشابه معادلة الاستمرار التي تُعبّر بشكلٍ صريحٍ عن قانون مصونية الشحنة.

دراسة العلاقة (24) في الحالة المستقرة:

يمكننا بسهولة أن نستنتج، أنه لا يوجد تدفق للطاقة بالنسبة للحقول الساكنة أو المستقرة (أي غير المتغيرة مع الزمن) في الأوساط التي لا تحوي شحنات وتيارات، ونلاحظ ذلك من العلاقة التالية:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \vec{H} \cdot (0) - \vec{E} \cdot (0) = 0\,.$$

في الواقع، إذا درسنا **الحالة المستقرة**، الموافقة للمساواة $\partial \xi / \partial t = 0$، كحالة خاصة، فإن **طاقة الحقل الكهرطيسي** في الحجم V **لا تتغير** ويُعوَّض ضياع الطاقة على شاكلة حرارة جول بتدفق طاقة الحقل الكهرطيسي من الخارج. وهكذا، نقتنع بأن **للمتجهة $\vec{S}$ معنى كثافة طاقة الحقل الكهرطيسي** في الحجم V في الوسط. وبالتالي، تأخذ أبعاد الواط على متر مربع.

وإذا عدنا إلى الحالة الخاصة الأخرى، عندما **لا تشع** الجملة المدروسة، $\oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS = 0$، فإن إصدار حرارة جول مرتبط **بتناقص** طاقة الحقل الكهرطيسي في الحجم V. وبالتالي، يمكن **تفسير w على أنها كثافة طاقة الحقل الكهرطيسي** في الحجم V في الوسط أيضاً. **وتكمن أهمية متجهة بوينتنغ في علم الضوء، بكون قيمتها الوسطى تُمثِّلُ شدة الضوء المنتشر، واتجاهها يُحددُ اتجاه انتشار الضوء.**

5- تصنيف الحقول الكهرطيسية: Classification of Electromagnetic Fields

لقد ناقشنا سابقاً معادلات مكسويل التي تصف الحقول الكهرطيسية بشكل عام. والآن سنميّز بين هذه الحقول:

١. **الحقول الساكنة:** تنتج هذه الحقول عن الشحنات الكهربائية الساكنة وتكون هذه الحقول مستقلة عن الزمن، وتكتب معادلات مكسويل بالنسبة لهذه الحقول بالشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=0\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\,; \\ &\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=0\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

نلاحظ في هذه الحالة عدم وجود ترابط بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي.

٢. **الحقول المستقرة:**

تتولد هذه الحقول عن حركة الشحنات التي **سرعاتها ثابتة**، وتكون هذه الحقول مستقلة عن الزمن. لذا، تكتب معادلات مكسويل التي تصف هذه الحقول بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{J}\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\,; \\ &\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=0\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

في هذه الحالة، يوجد ترابط مباشر بين الحقلين الكهربائي والمغنطيسي، وذلك من خلال المعادلتين الأولى والثالثة.

٣. **الحقول المتغيرة ببطء:**

هذا يعني أن تغيرات الحقل تحقق الشرط $\partial\vec{E}/\partial t << \vec{J}$، لذا، تكتب معادلات مكسويل بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{J}\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\,; \\ &\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

هنا، يوجد ترابط مباشر بين $\vec{E}$ و $\vec{B}$، وذلك من خلال المعادلة الثانية.

٤. **الحقول المتغيرة بسرعة:**

تحقق هذه الحقول الشرط $\partial\vec{E}/\partial t >> \vec{J}$، ومنه تأخذ معادلات مكسويل الصيغ التالية:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\,; \\ &\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,; \qquad && \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

والترابط واضح بين الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ في المعادلتين الأولى والثانية.

6- اندفاع الحقل الكهرطيسي Electromagnetic Field Momentum:

إضافةً إلى كثافة الطاقة يمتلك الحقل الكهرطيسي كثافة اندفاعٍ. ومن أجل تعيين هذه الكثافة نتأمل جملة مغلقة مؤلفة من حقلٍ وجسيماتٍ مشحونةٍ، وندرس تغير اندفاع هذه الجسيمات الموجودة في الحجم V. فإذا فرضنا أن توزع الشحنات هو توزع مستمر، فإننا نجد باستخدام مفهوم **كثافة القوة الكهرطيسية المؤثرة** في الشحنات والتيارات المعينة بالعلاقة $\vec{f}_{em} = d\vec{F}/dV = \rho\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$، أن:

$$\frac{d\vec{P}_{em}}{dt} = \vec{F} = \int \vec{f}_{em}\, dV = \int \rho\, \vec{E}\, dV + \int \left(\vec{J} \wedge \vec{B}\right) dV\,,$$

حيث $\vec{P}_{em}$ الاندفاع الكلي للجسيمات.

وبكتابة ρ و $\vec{J}$ بدلالة المتجهين $\vec{D}$ و $\vec{H}$ من معادلتي مكسويل (1)، $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}$ ، و (3)، $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ ، نجد:

$$\frac{d\vec{P}_{em}}{dt} = \int \vec{E}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right) dV - \int \left(\dot{\vec{D}} \wedge \vec{B}\right) dV + \int \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) \wedge \vec{B}\, dV. \qquad (29)$$

من المعلوم، أن الحقلين الكهربائي والمغنطيسي يجب أن يكونا متناظرين، ولا بد هنا من مراعاة هذا التناظر. غير أن المعادلة (29) ليست متناظرة، وبالتالي كي تصبح متناظرة نُضيف الحد الآتي إلى طرفها الأيمن:

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \dot{\vec{B}}\right) \wedge \vec{D} + \vec{H}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right)$$

الذي يساوي الصفر، كما يبدو من معادلتي مكسويل الثانية، $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ ، والرابعة، $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. وعندئذٍ تؤول المعادلة (29) إلى الشكل التالي:

$$\frac{d\vec{P}_{em}}{dt} + \frac{d}{dt}\int \left(\vec{D} \wedge \vec{B}\right) dV = \int \left[\vec{E}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right) + \vec{H}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \vec{D} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) - \vec{B} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right)\right] dV. \qquad (30)$$

حيث $\frac{d}{dt}\left(\vec{D} \wedge \vec{B}\right) = \dot{\vec{D}} \wedge \vec{B} + \dot{\vec{B}} \wedge \vec{D}$.

يمكننا هنا الانتقال من التكامل الحجمي في العلاقة (30) إلى التكامل السطحي، حيث من الواضح أن التكامل السطحي يحوي جميع متجهات الحقل ذات المرتبة الثانية. ويؤول التكامل السطحي هذا إلى الصفر عندما يزداد السطح إلى اللانهاية، شريطة تناقص متجهات الحقل بشكل أسرع من تناقص الدالة $\frac{1}{r}$. إذا تحقق ذلك، أمكننا إهمال هذا التكامل، عند الانتقال به إلى حجم لامتناهي في الكبر. وبناءاً عليه تؤول المعادلة (30) إلى الشكل:

$$\frac{d\vec{P}_{em}}{dt} + \frac{d}{dt}\int \left(\vec{D} \wedge \vec{B}\right) dV = \frac{d}{dt}\left[\vec{P}_{em} + \int \left(\vec{D} \wedge \vec{B}\right) dV\right] = 0\,; \qquad (31)$$

ومن ثمَّ

$$\vec{P}_{em} + \int \left(\vec{D} \wedge \vec{B}\right) dV = \text{const}\,.$$

تدل العلاقة الأخيرة على أن الاندفاع الكلي للجملة المغلقة المؤلفة من حقل وجسيمات يبقى محفوظاً. يسمى المقدار

$$\boxed{\vec{g}_{em} = \vec{D} \wedge \vec{B}} \qquad (32)$$

بالكثافة الحجمية لاندفاع الحقل الكهرطيسي.

وهكذا، نجد أنه إضافة إلى تحقق قانون مصونية الطاقة الكلية للحقل الكهرطيسي يتحقق قانون مصونية اندفاعه. ويتم ذلك عند حدوث التأثيرات المتبادلة بين الحقول والجسيمات. ويقابل اكتساب الجسيمات للاندفاع، تناقصاً في اندفاع الحقل، والعكس بالعكس. إذْ يترافق ضياع اندفاع الجسيمات المشحونة، عند الإشعاع مثلاً، بتزايد اندفاع الحقل الكهرطيسي.

للمطالعة:

كان العالم لِبديف Lebedeev أول من تنبأ بنظرية تحقق اندفاع الحقل الكهرطيسي في عام 1901م.، وأثبت وجود الضغط الضوئي تجريبياً. ويكون اندفاع الحقل الكهرطيسي في الشروط العادية صغير جداً، لدرجة أنه لا يمكن عندها قياسه. لكن هذا الاندفاع يبدو في مجال الظواهر الذرية ذو قيمة مقارنةً باندفاع الجسيمات، وله الدور الرئيس في جميع ظواهر التأثيرات المتبادلة بين الإشعاع والمادة، إضافة إلى دوره المهم في العمليات التي تحدث داخل النجوم وفي أجوائها، وفي الظواهر الأخرى التي تتصف بأبعاد كونية. وأخيراً، يمكننا التأكد من صحة العلاقة التي تربط متجهة كثافة الاندفاع الكهرطيسي $\vec{g}_{em}$ ومتجهة بوينتنغ $\vec{S}$، التي تأخذ الشكل التالي:

$$\vec{g}_{em}=\vec{D}\wedge\vec{B}=\varepsilon\,\mu\,\vec{S}=\frac{1}{\upsilon^2}\vec{S}\,, \qquad (33)$$

حيث υ سرعة انتشار الحقل الكهرطيسي في الوسط المدروس، التي ترتبط مع خواص الوسط بعلاقة مكسويل التالية:

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (34)$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار العلاقة (32)، يمكن إعادة كتابة قانون مصونية الاندفاع الكلي (31) بالشكل التالي:

$$\boxed{\vec{P}_{em}+\vec{g}_{em}=const.}$$

إضافة لما ذكرناه سابقاً، ينتج من القانون الأخير لمصونية الاندفاع أن الحقل الكهرطيسي يمارس أثناء انعكاسه أو امتصاصه من قبل الجسم ضغطاً ضوئياً. لو كان الجسم حراً، لاكتسب تحت تأثير الضغط الضوئي تسارعاً في اتجاه حركة الحقل، أي لازداد اندفاعه.

يساوي الضغط الناتج عن الموجة الكهرطيسية، والمطبق على الجسم الماص **إلى الاندفاع** المنقول من قِبل الموجة إلى الجسم خلال واحدة الزمن في واحدة السطح.

وعند ورود موجة كهرطيسية ناظمياً على سطح ما، **وامتصاصها بشكل كامل** من قِبل هذا السطح، فإن ضغطها يساوي:

$$P=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}g_{em}=\sqrt{\varepsilon\mu}EH=\xi,$$

حيث: $\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$ و $\xi=\frac{1}{2}(ED+HB)$ كثافة الطاقة الكهرطيسية للموجة. وبالتالي، تساوي القيمة العددية لضغط الموجة الكهرطيسية إلى كثافة طاقة الموجة في حالة الامتصاص الكلي.

أما في حالة الانعكاس الكلي عن سطح الجسم يتغير اندفاع الموجة بشكل مغاير لما سبق، ويكتسب السطح اندفاعاً أكبر بمرتين منه في حالة الامتصاص الكلي. وبالتالي، يكون الضغط في هذه الحالة أكبر بمرتين $(P=2\xi)$ أيضاً.

7- الشروط الحدية The Critical Conditions:

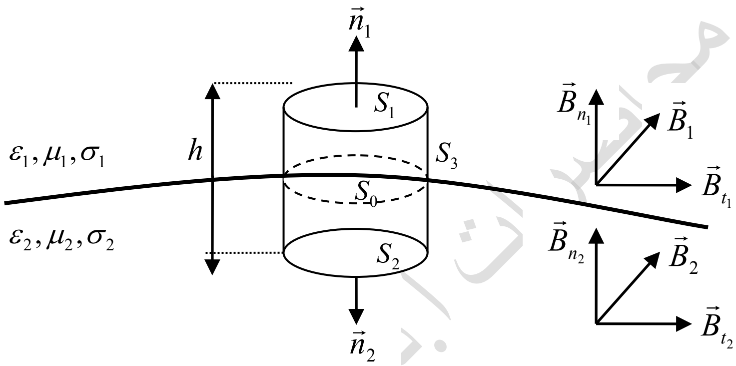
يُقصد بالشروط الحدية، دراسة تغيرات الحقل الكهرطيسي **بالقرب من الحدود الفاصلة** بين الأوساط المادية المختلفة المميزة بالمقادير ε و μ و σ. سنرى حالات **استمرار** مركبات الحقل الكهرطيسي **وانقطاعها** عند الحدود الفاصلة بمساعدة معادلات مكسويل بصيغها التكاملية.

1.7- استمرار المركبة الناظمية للحقل $\vec{B}$:

لدراسة الشرط الحدي **للمركبة الناظمية** لحقل التحريض المغنطيسي $\vec{B}$ ننطلق من معادلة مكسويل بصيغتها التكاملية:

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}d\vec{S} = 0\,. \tag{35}$$

يوضح الشكل المبين أدناه رسماً توضيحياً للسطح الفاصل بين وسطين مختلفين يتميز الأول بالمقادير ε_1 و μ_1 و σ_1، والثاني بالمقادير ε_2 و μ_2 و σ_2.



لتكن $\vec{e}_n$ متجه واحدة محمول على الناظم للسطح الفاصل و $\vec{e}_t$ متجه واحدة محمول مماس السطح الفاصل. عندئذٍ، نحلل $\vec{B}$ إلى مركبتين بالشكل التالي:

$$\vec{B} = B_n\vec{e}_n + B_t\vec{e}_t\,;\quad B_n = \vec{e}_n\cdot\vec{B} \quad \& \quad B_t = \vec{e}_t\cdot\vec{B} = \left|\vec{e}_n\wedge\vec{B}\right|. \tag{36}$$

نُنشئ الآن على السطح الفاصل للوسطين المختلفين **غشاءً رقيقاً أسطواني الشكل**، بسماكة h؛ وسطح قاعدته العلوية S_1 وسطح قاعدته السفلية S_2، وسطحه الجانبي S_3.

وعليه يمكننا كتابة المعادلة (35) بالشكل:

$$\oint_{S_1}\vec{B}\cdot\vec{n}_1 dS_1 + \oint_{S_2}\vec{B}\cdot\vec{n}_2 dS_2 + \oint_{S_3}\vec{B}\cdot\vec{n}_3 dS_3 = 0 \tag{37}$$

نختار الاتجاه الموجب للناظم من الوسط الثاني إلى الوسط الأول. ثم نطبق العلاقة (36.2)، فنجد:

$$B_{n_1}S_1 - B_{n_2}S_2 + \overline{B}S_3 = 0,$$

حيث $\overline{B}$ القيمة الوسطى لحقل التحريض المغنطيسي على السطح الجانبي.

للحصول على الشرط الحدي نجعل السماكة $h\to 0$، مما يؤدي إلى أن $S_1 = S_2 \to S_0, S_3 = 0$، ومن ثمَّ:

$$(B_{n_1} - B_{n_2})\,S_0 = 0\,;\quad S_0 \neq 0.$$

ومنه:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \qquad \text{أو} \qquad \vec{e}_n\cdot\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \tag{38}$$

تدل العلاقة (38) على أن المركبة الناظمية لحقل التحريض المغنطيسي مستمرة على السطح الفاصل بين الوسطين المختلفين. أي أن:

$$\boxed{\mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.} \tag{39}$$

نستنتج من ذلك، أن المركبة الناظمية للحقل المغنطيسي $\vec{H}$ منقطعة على السطح الفاصل بمقدار μ_2 / μ_1.

2.7- انقطاع المركبة الناظمية للحقل $\vec{E}$:

لدراسة الشرط الحدي للمركبة الناظمية لحقل التحريض الكهربائي $\vec{D}$ ننطلق من معادلة مكسويل الأولى:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q. \tag{40}$$

بإتباع الخطوات السابقة نفسها، نجد:

$$(D_{n_1} - D_{n_2})\, S_0 = q\,;$$

ومن ثمَّ:

$$\boxed{D_{n_1} - D_{n_2} = q / S_0 = \sigma_s\,,} \tag{41}$$

حيث σ_s كثافة الشحنات السطحية على السطح الفاصل بين الوسطين الماديين المختلفين.

وهكذا، نستنتج أن **المركبة الناظمية** لحقل التحريض الكهربائي $\vec{D}$ **منقطعةً** على السطح الفاصل بين الوسطين، عندما توجد عليه شحنات سطحية. وهذه الحالة تسود عند **النواقل**، لأنها تملك كثافة سطحية للشحنات. وعند **العوازل** تكون المركبة الناظمية هذه **مستمرةً**، لأنها لا تحوي على كثافة شحنات سطحية.

وخلافاً لذلك، تكون **المركبة الناظمية للحقل الكهربائي** $\vec{E}$ **منقطعة** عند **المواد العازلة والناقلة**، وتكون قيمة الانقطاع مساوية σ_s / ε. إذاً، يعبّر عن شرط انقطاع المركبة الناظمية للحقل $\vec{E}$ بالعلاقة الآتية، آخذين بالحسبان العلاقة التي تربط بين متجهتي التحريض الكهربائي والحقل الكهربائي $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$:

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} = \sigma_s\,.} \tag{42}$$

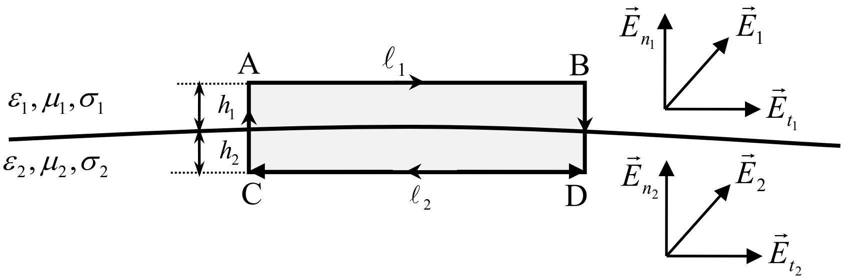
3.7- استمرار المركبة المماسية للحقل الكهربائي $\vec{E}$:

لننشئ غشاءً على شاكلة **مستطيل** على السطح الفاصل بين الوسطين طوله ℓ وعرضه h_1 في الوسط الأول و h_2 في الوسط الثاني. ونأخذ الاتجاه الموجب للجولان، كما في الشكل الآتي. نطبق معادلة مكسويل الثانية، فنجد:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\,;$$

ومن ثمّ

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_B^C \vec{E} \cdot (d\vec{h}_1 + d\vec{h}_2) + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_D^A \vec{E} \cdot (d\vec{h}_2 + d\vec{h}_1) = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$



ومن ثمَّ:

$$\ell E_{t_1} - h_1 E_{n_1} - h_2 E_{n_2} - \ell E_{t_2} + h_2 E_{n_2} + h_1 E_{n_1} + h_1 E_{n_1} = -\frac{\partial \overline{B_n}}{\partial t}\ell(h_1 + h_2),$$

حيث $\overline{B_n}$ **التدفق المغنطيسي الوسطي عبر الغشاء الرقيق**.

وعندما $h_1 \to 0$ و $h_2 \to 0$، فإن مساحة المستطيل تتناهى إلى الصفر، ومن ثمَّ:

$$\ell\left(E_{t_1} - E_{t_2}\right) = 0\,; \quad \ell \neq 0$$

ومن ثمَّ:

$$\boxed{E_{t_1} - E_{t_2} = 0} \quad \text{أو} \quad \boxed{\vec{e}_n \wedge \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0} \tag{43}$$

نلاحظ هنا، أن **المركبة المماسية** للحقل $\vec{E}$ مستمرة عند السطح الفاصل. ويمكننا بسهولة، أن نستنتج **انقطاع** المركبة المماسية لكثافة التيار، الذي يبلغ المقدار $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$، حيث لدينا $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$. بالتعويض في العلاقة (43) نجد:

$$\boxed{\frac{J_{t_1}}{J_{t_2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.} \tag{44}$$

4.7- استمرار المركبة المماسية للحقل المغنطيسي $\vec{H}$:

نحصل على الشرط الحدي للمركبة المماسية للحقل $\vec{H}$ باستخدام معادلة مكسويل الرابعة:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\,.$$

بإتباع نفس الخطوات في الفقرة السابقة، نجد:

$$\ell H_{t_1} - \ell H_{t_2} + h_1 H_{n_1} + h_2 H_{n_2} - h_1 H_{n_1} - h_2 H_{n_2} = (J_n + \frac{\partial D_n}{\partial t})\,\ell\left(h_1 + h_2\right).$$

إذا كانت سرعة تغير حقل الإنزياح الكهربائي محدودة، و المركبة الناظمية لكثافة التيار صغيرة جداً، بحيث يمكن إهمالها، وعندما $h_1 \to 0$ و $h_2 \to 0$، فإننا نحصل على المساواة:

$$\ell\left(H_{t_1} - H_{t_2}\right) = 0\,;$$

ومن ثمَّ

$$\boxed{H_{t_1} = H_{t_2}\,.} \tag{45}$$

هذا يعني، أن المركبة **المماسية** للحقل $\vec{H}$ **مستمرة** على السطح الفاصل. ولكن المركبة المماسية للحقل $\vec{B}$ تكون منقطعة على السطح الفاصل، ومقدار هذا الانقطاع يساوي μ_1/μ_2:

$$\boxed{\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.} \tag{46}$$

في المواد التي تتمتع بخاصية **الناقلية الفائقة** لا تصلح العلاقة (44)، لأنها تملك كثافة تيار سطحية J_{sn}، ومن جهة أخرى يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ مساوياً الصفر، لأن $\sigma = \infty$ $\left(\vec{J} = \sigma\,\vec{E}\right)$. وبالتالي:

$$\boxed{H_{t_1} - H_{t_2} = J_{sn}\,.} \tag{47}$$

إذا كانت ناقلية الوسط الثاني كبيرة جداً، $\sigma_2 = \infty$، فإن $E_2 = 0$ و $H_2 = 0$. ومن ثمَّ تؤول العلاقة (47) إلى الشكل:

$$H_{t_1} = J_{sn}\,.$$

ومن ثمَّ

$$\left|\vec{e}_n \wedge \vec{H}\right| = \left|\vec{J}_{sn}\right| \quad (48)$$

ومن ثمَّ

$$\boxed{\vec{e}_n \wedge \vec{H} = \vec{J}_{sn}}$$

نستنتج من ذلك، أن **متجه** الكثافة السطحية للتيار $\vec{J}_{sn}$ **عمودي** على اتجاه الحقل المغنطيسي $\vec{H}$ ويقعان في نفس المستوي.

يمكن تجميع كل المعادلات التي تمّ دراستها في هذه الفقرة بالجدول الآتي:

الوصف	الشكل التفاضلي	الشكل التكاملي
حالة عامة: الحقول متغيرة مع الزمن	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \dfrac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$ $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_V \rho dV$ $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \oint_V \rho\, dV = 0$
حالة عامة: الحقول ساكنة	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_V \rho dV$ $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$
الحقول متغيرة مع الزمن والأوساط المادية عوازل كاملة (مثالية) $\rho = 0, J = 0$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \dfrac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$ $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_V \rho\, dV$ $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
الحقول ساكنة والأوساط المادية عوازل كاملة $\rho = 0, J = 0$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = 0$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_V \rho\, dV$ $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$ $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_V \rho\, dV$ $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_S \vec{J}_c\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\oint_V \rho\, dV = 0$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}_c = \sigma\vec{E}$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_c = 0$	الحقول متغيرة مع الزمن والأوساط المادية نواقل جيدة $\lvert\sigma E\rvert >> \lvert\partial D/\partial t\rvert$
$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_V \rho\, dV$ $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}_c = \sigma\,\vec{E}$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_c = 0$	الحقول ساكنة والأوساط المادية نواقل متجانسة، $\sigma \neq 0$
في الحالة المتغيرة مع الزمن **جميع الحقول تساوي الصفر**، أما في الحالة الساكنة **الحقل الكهربائي يساوي الصفر** و $\vec{H} \neq 0$		عندما تكون الأوساط المادية نواقل كاملة

6- أمثلة محلوله Examples:

١. لدينا حقل كهربائي من الشكل: $\vec{E}=\frac{E_0x^2}{a^2}\vec{e}_x-\frac{2E_0}{a^2}(x+y)z\vec{e}_z.$

بفرض أن $E_y=f(y)$ تابعة فقط للمتحول y، و $\rho=0$ في كل مكان من الفراغ، والمطلوب:

أولاً– إيجاد المركبة E_y. **ثانياً**– إيجاد $\vec{B}(t)$ اللازمة للحصول على دوّار الحقل الكهربائي. **ثالثاً**– تحديد كثافة تيار الناقلية على فرض، أن كثافة تيار الإنزياح تساوي الصفر. **رابعاً**– التحقق من صحة العلاقة $\vec{\nabla}.\vec{B}(t)=0$.

خامساً– التحقق من أن دوار الحقل الكهربائي $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ المتولد عن شحنة نقطية يساوي الصفر في أية نقطة من الفراغ.

الحل:

أولاً: نعلم أنَّ: $\vec{E}=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z;$

ومن ثمَّ: $E_x=\frac{E_0}{a^2}x^2 \quad \& \quad E_z=-\frac{2E_0}{a^2}(x+y)z$

وطالما $\rho=0$، فإن: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho=0\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0;$

ومنه:

$$\frac{2E_0}{a^2}x+\frac{\partial E_y}{\partial y}-\frac{2E_0}{a^2}(x+y)=0\Rightarrow\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{2E_0}{a^2}y$$

$$\boxed{\therefore E_y=\int\frac{2E_0}{a^2}y^2dy=\frac{2}{3}\frac{E_0}{a^2}y^3}$$

ثانياً: كي يكون للحقل الكهربائي دواراً يجب أن تتحقق المساواة $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

ومن ثمَّ

$$\begin{cases}(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_x=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=\left(-\frac{2E_0}{a^2}z-0\right)=-\frac{2E_0}{a^2}z;\\(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_y=\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=\left(0+\frac{2E_0}{a^2}z\right)=\frac{2E_0}{a^2}z;\\(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_z=\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=(0-0)=0.\end{cases}$$

$$\therefore-\frac{2E_0}{a^2}z\vec{e}_x+\frac{2E_0}{a^2}z\vec{e}_y=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{e}_x-\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{e}_y \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}B_x=\int\frac{2E_0}{a^2}zdt=\frac{2E_0}{a^2}zt;\\B_y=\int-\frac{2E_0}{a^2}zdt=-\frac{2E_0}{a^2}zt;\end{cases}$$

ومنه نحصل على العلاقة النهائية للحقل المغنطيسي المطلوب التي تأخذ الشكل:

$$\boxed{\vec{B}(t)=B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y=\frac{2E_0}{a^2}zt(\vec{e}_x-\vec{e}_y).}$$

ثالثاً: حسب معطيات الطلب ثانياً تؤول معادلة مكسويل الأولى إلى الشكل $\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ ومن ثمَّ:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{J}\ ;$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)_x = \frac{2E_0}{a^2} t\ ; \quad \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)_y = \frac{2E_0}{a^2} t\ ; \quad \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)_z = 0\,.$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{2E_0}{\mu_0 a^2} t\vec{e}_x + \frac{2E_0}{\mu_0 a^2} t\vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{J}\right| = \sqrt{\frac{8E_0^2 t^2}{\mu_0^2 a^4}} = \frac{2\sqrt{2}E_0 t}{\mu_0 a^2}.$$

رابعاً: نلاحظ من الطلب الثاني أن $\vec{B}(t)$ يتعلق بالإحداثية z والزمن t ولا يتعلق بـ x و y ، وبالتالي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

خامساً: لدينا من الفرض:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}\right).$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\ .$$

ومن ثمَّ

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ;$$

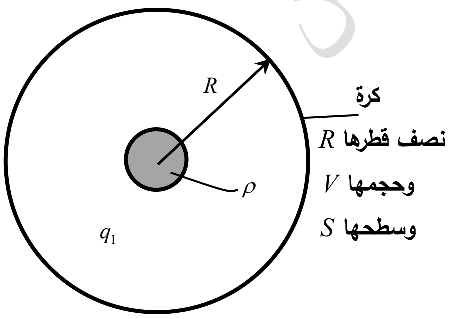
$$r^3 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}\ .$$

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix}$$

بالتعويض والترتيب في معادلة الدوار السابقة، نجد $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$.

٢. طبق مبرهنة غوص على المعادلة $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ من أجل الحصول على قانون كولون بين شحنتين كهربائيتين.

الحل:



لحل هذه المسألة، نبدأ بإيجاد الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة النقطية q_1 ، كما في الشكل المجاور. يمكننا اعتبار الشحنة النقطية حالة حدية لتوزع حجمي للشحنة، عندما يؤول الحجم إلى الصفر.

لتكن الشحنة النقطية q_1 متوضّعة في مركز كرة خيالية، نصف قطرها R ولنحسب الشحنة q_1 من تكامل كثافة الشحنة الحجمية ρ على حجم الكرة.

لنأخذ إذاً التكامل الحجمي لطرفي معادلة مكسويل الآتية:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

ونطبق هنا مبرهنة غوص التي تسمح لنا بالانتقال من التكامل الحجمي إلى التكامل السطحي: $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} ds = q_1 / \varepsilon_0$

وبفضل تناظر المسألة المدروسة يبقى الضرب السلّمي $\vec{E}.\vec{n}$ ثابتاً عند جميع نقاط الكرة التي تحوي الشحنة المدروسة، لذا يمكن أن نكتب:

$$\vec{E}\cdot\vec{n}\oiint_S ds = q_1/\varepsilon_0 \quad\Rightarrow\quad \vec{E}\cdot\vec{n}\left(4\pi R^2\right) = q_1/\varepsilon_0\ ;$$

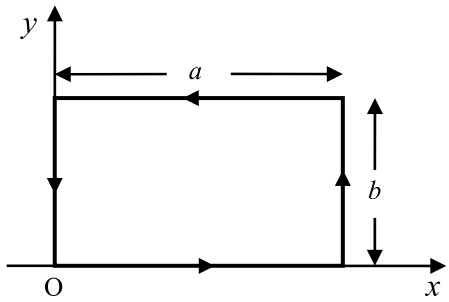
ومن ثمَّ
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R^3}\vec{R}\,,$$

حيث $\vec{R}$ متجهة الواحدة باتجاه متجه الناظم على السطح الكروي و $\vec{n} = \vec{R}/\left|\vec{R}\right|$.

تعطى القوة الكهربائية التي تؤثر بها الشحنة q_1 في شحنةٍ q تقع في جوارها بالعلاقة

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{R^3}\vec{R}.$$

وهذه العلاقة ليست سوى قانون كولون.



٣. لدينا الحقل الكهربائي التالي: $\vec{E} = -cy\vec{e}_x + cx\vec{e}_y$، والمطلوب بيّن فيما إذا كان الحقل $\vec{E}$ محفوظاً أم لا ثم أحسب قيمة الجولان $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}$ على المسار المبين في الشكل المجاور.

الحل:

أولاً: في الحالة العامة، لكي يكون الحقل الكهربائي محفوظاً يجب أن يحقق الشرط $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ (دوران الحقل الكهربائي يساوي الصفر)، ولكن

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -cy & cx & 0 \end{vmatrix} = 2c\vec{e}_z \neq 0$$

ومن ثمَّ تدل الأخيرة على أن الحقل المعرف غير محفوظ، وبالتالي لا يمكن هنا تحديد تابع كمونه.

ثانياً: لدينا

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\cdot\vec{n}dS$$
$$= \int_S\left(2c\vec{e}_z\right)\cdot\vec{e}_z dS = 2cS = 2cab\ ; \quad \vec{e}_z = \vec{n}$$

٤. لدينا حقل تحريض مغنطيسي $\vec{B}$ معطى بالعلاقة $\vec{B} = B_x(x,y)\,\vec{e}_x + B_y(x,y)\,\vec{e}_y$، والمطلوب:

a. أوجد علاقة كثافة التيار $\vec{J}$.

b. إذا كانت $J = 0$ و $B_x(x,y) = cxy$ حيث c ثابت، أوجد المركبة B_y للحقل $\vec{B}$.

الحل: أولاً:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad\Rightarrow\quad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = 0\ \vec{e}_x + 0\ \vec{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

ثانياً: لدينا $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ ومن ثمَّ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial B_x}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad B_y=-\frac{\partial B_x}{\partial x}\partial y\,.$$

وبالتعويض العلاقة الأخيرة في عبارة كثافة التيار نجد أنَّ:

$$\vec{J}=0=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_x}{\partial x}\partial y-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

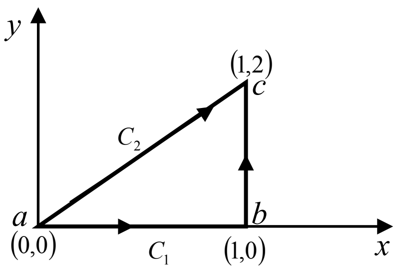
$$J=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial B_y}{\partial y}=\frac{\partial B_x}{\partial y}=cx$$

$$\therefore B_y(x,y)=\int cxdy=cxy.$$

٥. تُعطى علاقة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بالشكل التالي:

$$\vec{E}=\left(axy^2+ax^2y\right)\vec{e}_x+ax^2y\vec{e}_y$$

حيث a ثابت، والمطلوب:



أولاً– أوجد جولان الحقل الكهربائي $\oint\vec{E}.d\vec{l}$ على المسار $C_1:(0,0)\rightarrow(1,0)\rightarrow(1,2)$ المبين في الشكل المجاور.

ثانياً– أوجد الجولان على المسار $C_2:(0,0)\rightarrow(1,2): y=2x$.

ثالثاً– استناداً إلى نتيجة الطلبين الأول والثاني بيّن فيما إذا كان الحقل محفوظاً أم لا.

رابعاً– أوجد $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}$، ماذا تستنتج؟

الحل:

أولاً:

$$\vec{E}\cdot d\vec{l}=\left(E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y\right)\cdot\left(dx\vec{e}_x+dy\vec{e}_y\right);$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{l}=E_xdx+E_ydy=a\left(xy^2+x^2y\right)dx+ax^2ydy$$

Along path $ab\rightarrow y=0\,;\, dy=0\Rightarrow\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\,;$

$$\therefore\int_a^b\vec{E}.d\vec{l}=0\,.$$

Along path $bc\rightarrow x=1\,;\, dx=0\Rightarrow\vec{E}\cdot d\vec{l}=aydy\,;$

$$\therefore\int_b^c\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{y=0}^{2}aydy=2a;$$

$$\therefore\int_{c_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{y=0}^{2}aydy=2a.$$

ثانياً:

Along path $ac\rightarrow y=2x\,;\, dy=2dx\Rightarrow\vec{E}\cdot d\vec{l}=10ax^2dx\,;\quad\Rightarrow$

$$\int_b^c\vec{E}\cdot d\vec{l}=a\int_{x=0}^{1}10x^3dx=\frac{5}{2}a.$$

ثالثاً: الحقل الكهربائي المدروس في هذه المسألة غير محفوظ، لأن:

$$\int_{c_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{c_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=2a-\frac{5}{2}a\neq 0.$$

رابعاً:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z;$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\left(2axy-2axy-ax^2\right)\vec{e}_z=-ax^2\vec{e}_z\neq 0$$

من جهة أخرى:

$$\int_S\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\cdot\vec{n}dS=\int_S\left(-ax^2\vec{e}_z\right)\cdot\vec{e}_z dS;\quad \vec{e}_z=\vec{n}$$

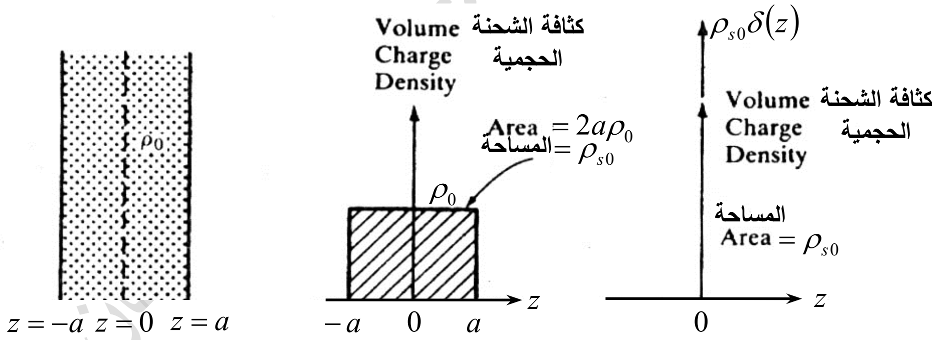
$$\therefore\int_S\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\vec{n}dS=-a\int_S x^2dxdy=-a\int_0^2\int_0^1 x^2dxdy=-\frac{2a}{3}$$

ومنه نستنتج أن:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\cdot\vec{n}dS.$$

٦. يمتد لوح بكثافة شحنة سطحية منتظمة ρ_{S0} (مقدرة بوحدة القياس $\mathrm{C/cm^2}$) على كامل المستوي xy، والمطلوب كتابة قانون غوص لتوزع شحنة اللوح بالشكل التفاضلي.

الحل:



(a) (b) (c)

لنأخذ شريحة من الشحنات متوضّعة بين المستويين $z=+a$ و $z=-a$ بكثافة شحنات سطحية $\rho_{S0}\left(\mathrm{C/cm^2}\right)$، كما هو مبين في الشكل (a). ويبين الشكل (b) كثافة الشحنة الحجمية كتابع لـ z. تُعطى الشحنة لكل وحدة سطح من الشريحة بالتكامل التالي $\int_{z=-a}^{a}\rho_0 dz=2a\rho_0=\rho_{s0}$ وقيمة هذا التكامل تساوي المساحة الواقعة تحت المنحني في الشكل (b). لنفرض الآن، أن a يتقلص إلى الصفر، فتزداد ρ_0 إلى اللانهاية مع بقاء ρ_{S0} ثابتة، والشكل (c) يوضح الرسم التخطيطي لهذه النتيجة.

يدعى التابع الذي يصف هذه الحالة بتابع **دلتا – ديراك** ويُمثَّل بالمقدار $\rho_{s0}\delta(z)$، حيث $\delta(z)$ يحقق الخواص التالية:

$$\delta(z)=\begin{cases}0 & for \quad z\neq 0;\\ \infty & for \quad z=0.\end{cases}$$

$$\int_{z=-\infty}^{\infty}\delta(z)\,dz=\int_{z=0-}^{z=0+}\delta(z)\,dz=\lim_{a\to 0}\int_{z=-a}^{z=+a}\frac{1}{2a}dz=1.$$

وهكذا، تكون كثافة الشحنة الحجمية الموافقة لكثافة الشحنة السطحية لشريحةٍ متوضّعةٍ في المستوي $z=0$ مساويةً $\rho_{s0}\delta(z)$، ومن ثمَّ يُكتب قانون غوص بالشكل التفاضلي الآتي:

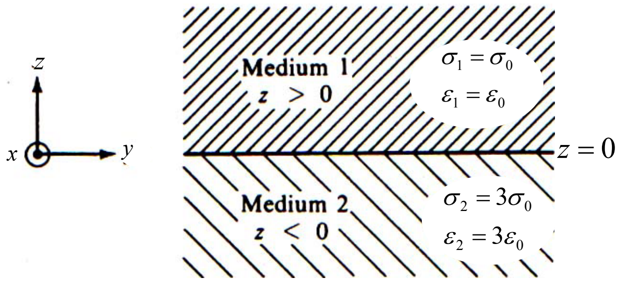
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{s0}\delta(z).$$

وإذا كانت الشريحة متوضّعة في المستوي $z=z_0$ ينزاح تابع دلتا إلى $z=z_0$، ويكتب بالشكل الآتي:

$$\delta(z-z_0)=\begin{cases}0 & for \quad z\neq z_0;\\ \infty & for \quad z=z_0.\end{cases}$$

$$\int_{z=-\infty}^{\infty}\delta(z-z_0)\,dz=1;\qquad \int_{z=-\infty}^{\infty}f(z)\,\delta(z-z_0)dz=f(z_0)$$

ويُعدّل قانون غوص في هذه الحالة ويأخذ الشكل $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}\delta(z-z_0)$.



٧. يبين الشكل المجاور سطحاً فاصلاً بين وسطين $z>0$ و $z<0$. بفرض أن **الحقول منتظمة** ومستقلة عن الزمن في كلا الوسطين، وتعطى كثافة التيار في الوسط الأول بالعلاقة:

$$\vec{J}=J_{1x}\vec{e}_x+J_{1y}\vec{e}_y+J_{1z}\vec{e}_z=J_0\vec{e}_x+2J_0\vec{e}_y+6J_0\vec{e}_z.$$

والمطلوب إيجاد كلٍ من $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ باستخدام الشروط الحدية ثم كثافة الشحنات السطحية σ_s على السطح $z=0$.

الحل: أولاً: بتطبيق المعادلة المادية من أجل الحقول المنتظمة $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ نجد أنَّ

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}_1}{\sigma_1}=\frac{J_0}{\sigma_0}\vec{e}_x+\frac{2J_0}{\sigma_0}\vec{e}_y+\frac{6J_0}{\sigma_0}\vec{e}_z=\frac{J_0}{\sigma_0}\left[\vec{e}_x+2\vec{e}_y+6\vec{e}_z\right];$$

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{J}_2}{\sigma_2}=E_{2x}\vec{e}_x+E_{2y}\vec{e}_y+E_{2z}\vec{e}_z.$$

ومن شرط استمرار المركبة المماسية لـ $\vec{E}$ نجد:

$$\vec{e}_z\wedge\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}E_{1x}=E_{2x}=\dfrac{J_0}{\sigma_0};\\[2mm] E_{1y}=E_{2y}=\dfrac{2J_0}{\sigma_0}.\end{cases}$$

ومن جهة أخرى، نجد من شرط استمرار المركبة الناظمية لكثافة التيار المركبة E_{2z}:

$$\vec{e}_z\cdot\left(\vec{J}_1-\vec{J}_2\right)=0\Rightarrow J_{1z}=J_{2z}\quad\text{or}\quad\sigma_1E_{1z}=\sigma_2E_{2z}$$

$$\therefore E_{2z}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}E_{1z}=\frac{\sigma_0}{3\sigma_0}\frac{6J_0}{\sigma_0}=\frac{2J_0}{\sigma_0}.$$

ثانياً: نجد كثافة الشحنات السطحية من شرط انقطاع المركبة الناظمية لحقل الإزاحة الكهربائي $\vec{D}$:

$$\vec{e}_z\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\sigma_s\quad\Rightarrow\quad D_{1z}-D_{2z}=\sigma_s$$

$$\therefore\varepsilon_1E_{1z}-\varepsilon_2E_{2z}=\sigma_s=\varepsilon_0\frac{6J_0}{\sigma_0}-3\varepsilon_0\frac{2J_0}{\sigma_0}=0.$$

ومن ثمَّ تكون كثافة الشحنات السطحية σ_s على السطح $z=0$ معدومة وهو المطلوب.

٨. أوجد الشرط الحدي للمركبة الناظمية لمتجهة بوينتنغ $\vec{S}$ على السطح الفاصل بين وسطين مختلفين في الحالة العامة. ماذا نستنتج؟

الحل: يُعبّر عن المركبة الناظمية بالصيغة $\vec{e}_n \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2)$. وباستخدام المطابقتين التاليتين:

$$\vec{E} \wedge \vec{H} = (\vec{e}_n \wedge \vec{E}) \wedge (\vec{e}_n \wedge \vec{H});$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

نجد:

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) = \vec{e}_n \cdot (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_1 - \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_2) = \vec{e}_n \cdot [(\vec{e}_n \wedge \vec{E}_1) \wedge (\vec{e}_n \wedge \vec{H}_1)] - \vec{e}_n \cdot [(\vec{e}_n \wedge \vec{E}_2) \wedge (\vec{e}_n \wedge \vec{H}_2)] \,.$$

لنطبق هنا كلاً من شرطي انقطاع المركبة المماسية للحقل $\vec{H}$ واستمرار المركبة الناظمية للحقل $\vec{E}$، فنجد:

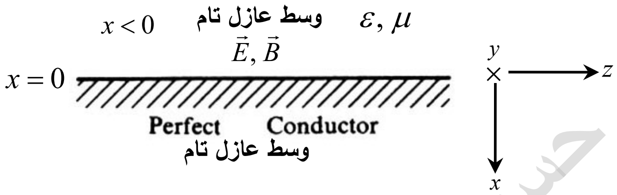
$$\vec{e}_n \cdot \{(\vec{e}_n \wedge \vec{E}_2) \wedge [(\vec{e}_n \wedge \vec{H}_2) + J_s]\} - \vec{e}_n \cdot [(\vec{e}_n \wedge \vec{E}_2) \wedge (\vec{e}_n \wedge \vec{H}_2)] = \vec{e}_n \cdot [(\vec{e}_n \wedge \vec{E}_2) \wedge \vec{J}_s] = \vec{e}_n \cdot [(\vec{e}_n \wedge \vec{E}_1) \wedge \vec{J}_s].$$

$$\therefore \vec{e}_n \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) = -\vec{e}_n \cdot [\vec{J}_s \wedge (\vec{e}_n \wedge \vec{E}_1)] = -\vec{e}_n \cdot [\vec{e}_n (\vec{J}_s \cdot \vec{E}_1) - \vec{E}_1 (\vec{J}_s \cdot \vec{e}_n)] \,.$$

ولكن لدينا $\vec{e}_n \cdot \vec{J}_s = 0$.

وبالتالي، تُصبح العلاقة الأخيرة من الشكل $\vec{e}_n \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_2) = -\vec{J}_s \cdot \vec{E}_1$

نستنتج من العلاقة الأخيرة، أن المركبة الناظمية لمتجهة بوينتنغ في أية نقطة من السطح الفاصل منقطعة وتساوي درجة الانقطاع إلى كثافة الاستطاعة المرتبطة بكثافة التيار السطحية $\vec{J}_s$ في تلك النقطة. وعند غياب كثافة التيار السطحية، فإن المركبة الناظمية للمتجهة $\vec{S}$ تكون مستمرة بين الوسطين.



٩. يُجاورُ وسط عازل تام $x<0$ بوسطٍ ناقلٍ تامٍ $x=0$، كما في الشكل المجاور ويُعطى الحقل الكهربائي في الوسط العازل بالعلاقة الآتية:

$$\vec{E}_y(r,t) = [E_1 \cos(\omega t - \beta x \cos\theta - \beta z \sin\theta) + E_2 \cos(\omega t + \beta x \cos\theta - \beta z \sin\theta)]\,\vec{e}_y,$$

حيث E_1 و E_2 و ω و β و θ ثوابت. والمطلوب:

a. إيجاد العلاقة بين E_1 و E_2.

b. إيجاد كثافة التيار السطحي J_s على السطح $x=0$.

الحل:

أولاً: نعلم من الشروط الحدية، أن المركبة المماسية لسطح الناقل التام تساوي الصفر:

$$E_y\big|_{x=0} = [(E_1 + E_2)\cos(\omega t - \beta z \sin\theta)] = 0$$

ولكي تتحقق هذه المساواة من أجل جميع قيم z و t يجب أن يكون:

$$E_1 + E_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = -E_2.$$

ومن ثَمَّ

$$\vec{E}_y(r,t) = [2E_1 \sin(\beta x \cos\theta)\sin(\omega t - \beta z \sin\theta)]\,\vec{e}_y \,. \qquad (1)$$

ثانياً: تساوي كثافة التيار السطحية للمركبة المماسية للحقل المغنطيسي:

$$\vec{J}_s = -\vec{e}_x \wedge [\vec{H}]_{x=0} = -\frac{1}{\mu}\vec{e}_x \wedge [\vec{B}]_{x=0}$$

وهذا يتطلب منا تحديد $\vec{B}$ من معادلة مكسويل الثانية $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$:

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x+\frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e}_z\ , \qquad (2)$$

وبتعويض العلاقة (1) في (2) نجد:

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\beta\sin\theta\, 2E_1\sin(\beta x\cos\theta)\cos(\omega t-\beta z\sin\theta)\vec{e}_x+\beta\cos\theta\, 2E_1\cos(\beta x\cos\theta)\sin(\omega t-\beta z\sin\theta)\vec{e}_z\ ,$$

$$\vec{B}(r,t)=-\frac{2E_1\beta}{\omega}\left[\sin\theta\sin(\beta x\cos\theta)\sin(\omega t-\beta z\sin\theta)\vec{e}_x-\cos\theta\cos(\beta x\cos\theta)\cos(\omega t-\beta z\sin\theta)\vec{e}_z\right] \qquad (3)$$

وهكذا، نحصل على حقل التحريض المغنطيسي على سطح الناقل التام. وبالتالي:

$$\left[\vec{B}\right]_{x=0}=\frac{2E_1\beta}{\omega}\left[\cos\theta\cos(\omega t-\beta z\sin\theta)\right]\vec{e}_z\ . \qquad (4)$$

ونحصل أيضاً على كثافة التيار السطحية عند السطح الفاصل $x=0$ حيث نجد:

$$\vec{J}_s=-\frac{1}{\mu}\vec{e}_x\wedge\left[\vec{B}\right]_{x=0}=\frac{2E_1\beta}{\omega\mu}\left[\cos\theta\cos(\omega t-\beta z\sin\theta)\right]\vec{e}_y\ . \qquad (5)$$

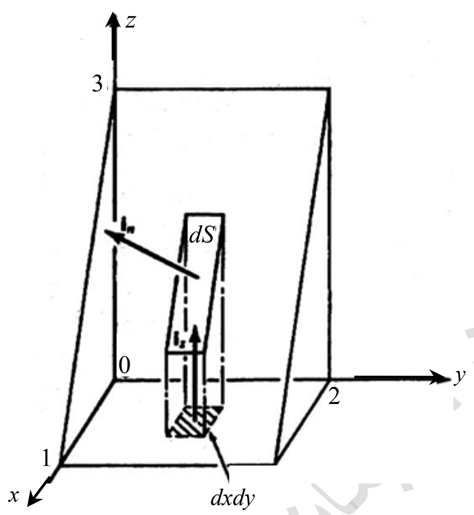
١٠. تُعطى كثافة التيار الكهربائي في منطقةٍ ما بالعلاقة:

$$\vec{J}=3x\,\vec{e}_x+(y-3)\,\vec{e}_y+(2+z)\,\vec{e}_z .$$

أوجد تدفق التيار الكهربائي الخارج من سطح صندوق محدد بالمستويات الخمسة الآتية، وذلك بطريقتين، الشكل المجاور:

$$x=0;\quad y=0;\quad y=2;\quad z=0;\quad 3x+z=3.$$

نعدُّ هنا أن اتجاه متجه الواحدة العمودية على السطح خارجاً منه، بحيث يُعطي المقدار $\int\vec{J}\cdot d\vec{S}$ تدفق التيار الكهربائي الخارج من السطح المدروس في هذه المسألة.



الحل: الطريقة الأولى:

1) for the surface $x=0$ $\begin{cases} d\vec{S}=-dydz\,\vec{e}_x\ ; \\ \vec{J}=(y-3)\,\vec{e}_y+(2+z)\,\vec{e}_z\ . \end{cases}$

$$\therefore\int\vec{J}\cdot d\vec{S}=0$$

2) for the surface $y=0$ $\begin{cases} d\vec{S}=-dzdx\,\vec{e}_y\ ; \\ \vec{J}=3x\,\vec{e}_x-3\,\vec{e}_y+(2+z)\,\vec{e}_z\ . \end{cases}$

$$\therefore\int\vec{J}\cdot d\vec{S}=3\int_{x=0}^{x=1}dx\int_{z=0}^{z=3-3x}dz=3\int_{x=0}^{x=1}dx\,(3-3x)=3\int_{x=0}^{x=1}3dx\ -3\int_{x=0}^{x=1}(-3x)\,dx=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}.$$

3) for the surface $y=2$ $\begin{cases} d\vec{S}=dzdx\,\vec{e}_y\ ; \\ \vec{J}=3x\,\vec{e}_x+(y-3)\,\vec{e}_y+2\,\vec{e}_z\ . \end{cases}$

$$\therefore\int\vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{3-3x}3dzdx=-\frac{3}{2}.$$

4) for the surface $z=0$ $\begin{cases} d\vec{S} = -dxdy\,\vec{e}_z\,; \\ \vec{J} = 3x\,\vec{e}_x + (y-3)\,\vec{e}_y + 2\,\vec{e}_z\ . \end{cases}$

$$\therefore \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}(-dxdy) = -4.$$

5) for the surface $3x+z=3$; $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_n$;

حيث أن $\vec{e}_n$ متجهة الواحدة الناظمية على هذا السطح، مما يعني أن الحصول على مركبة عنصر السطح باتجاه متجه الواحدة $\vec{e}_z$، تستوجب إجراء ما يلي:

$$d\vec{S}\cdot\vec{e}_z = dS\,\vec{e}_n\cdot\vec{e}_z \equiv dxdy\,.$$

$$\therefore \vec{e}_n = \frac{\vec{\nabla}(3x+z)}{\left|\vec{\nabla}(3x+z)\right|} = \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{e}_z\,. \quad \Rightarrow$$

$$d\vec{S}\cdot\vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{10}}dS \equiv dxdy \qquad \Rightarrow dS = \sqrt{10}\,dxdy\,.$$

$$\therefore \begin{cases} d\vec{S} = (3\vec{e}_x + \vec{e}_z)dxdy\,; \\ \vec{J} = 3x\,\vec{e}_x + (y-3)\vec{e}_y + (5-3x)\vec{e}_z\ . \end{cases}$$

$$\therefore \int \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}(6x+5)dxdy = 16\,.$$

بالتالي، يكون التدفق الكلي الخارج من السطح مساوياً:

$$I = 0 + \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 4 + 16 = 15\ \text{A}\,.$$

الطريقة الثانية:

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right)dV = \int 5\,dV = 5\times\left(\frac{1\times2\times3}{2}\right) = 15\ \text{A}\ .$$

١١. بيّن أن المعادلة الموجية $\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$ لا متغيرة تحت تحويلات لورانتس، علماً أن $\psi = \psi(x,y,z,t)$.

الحل:

لدينا
$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_j}; \quad i = 1,2,3,4.$$

ثم إن
$$x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = z,\ \ x_4 = ict.$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x'_1} + \frac{\partial x'_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x'_2} + \frac{\partial x'_3}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x'_3} + \frac{\partial x'_4}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x'_4};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right);$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2\upsilon}{c^2} + \frac{\upsilon^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right).$$

بشكل مشابه نحصل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن:

$$\frac{\partial}{\partial x_4}=\frac{\partial x_1'}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_1'}+\frac{\partial x_2'}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_2'}+\frac{\partial x_3'}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_3'}+\frac{\partial x_4'}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_4'};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\upsilon\frac{\partial}{\partial x'}\right);$$

$$\therefore\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\gamma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-2\upsilon\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'}+\upsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right).$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y'^2}; \qquad \& \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

نعوض المشتقات الجزئية السابقة التي حصلنا عليها في المعادلة الموجية المعطاة في المسألة المطروحة، فنجد:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0;$$

$$\therefore\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}=0.$$

وهذا يعني أن المعادلة الموجية لا متغيرة تحت تحويلات لورانتس على عكس تحويلات غاليليه.

١٢. أكتب معادلة الحركة للإلكترون في الأوساط التالية: البلازما، والناقل، والعازل التام، والعازل الذي يحصل فيه فقد. ثم ناقش كل معادلة على حده.

الحل:

لنعتبر إلكتروناً ما كتلته m وشحنته e في وسط ما يُطبق عليه حقلاً كهربائياً متغيراً بالنسبة للزمن.

أولاً في البلازما الباردة: تؤخذ القوة الكهربائية فقط المؤثرة على الإلكترون بفعل الحقل الكهربائي المطبق $\vec{E}$. تُكتب بالتالي، معادلة الحركة بالشكل التالي:

$$m\ddot{\vec{r}}=e\vec{E}.$$

حيث r يمثل انزياح الإلكترون عن موضع الاتزان

ثانياً في الناقل: تتم إعاقة الإلكترون المتسارع نتيجة لعملية التصادم مع الشوائب أو أيونات الشبكة المهتزة. ويُعبّر عن ذلك بإضافة حد قوة التخامد التي تتناسب مع سرعة الإلكترون υ. لذا، يمكننا كتابة معادلة حركة الإلكترون، كما يلي:

$$m\ddot{\vec{r}}+m\gamma\dot{\vec{r}}=e\vec{E},$$

حيث γ عامل التخامد.

ثالثاً في العازل المثالي: يُفترض أنه لا يوجد في العازل المثالي تخامداً، غير أن الإلكترون يرتبط أو يُقيد بالأصل الناتج عنه بتردد طبيعي ω_0. يتأثر بالتالي، بقوة إرجاع متناسبة مع مقدار الإنزياح:

$$m\ddot{\vec{r}}+m\omega_0^2\vec{r}=e\vec{E}.$$

رابعاً وأخيراً في العازل غير عديم الفقد: يتأثر الإلكترون في هذا الوسط بالتخامد وبقوة الإرجاع. تُكتب بالتالي، معادلة حركة الإلكترون، كما يلي:

$$m\ddot{\vec{r}}+m\gamma\dot{\vec{r}}+m\omega_0^2\vec{r}=e\vec{E}.$$

١٣. هل يحقق الحقل الكهربائي $\vec{E}(x,y,z,t)=[f_+(z-ct)+f_-(z+ct)]\vec{e}_y$ معادلات مكسويل في الخلاء، حيث f_+ و f_- تابعين تحليليين اختياريين للمتغيرات $(z\pm ct)$، انظر الشكل الجانبي؟

الحل: يتحقق قانونا فراداي $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ وأمبير $\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$، إذا حقق اتحادها المعادلة الموجية التالية:

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0.$$

إذاً:

$$\left(\nabla^2-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[f_+(z-ct)+f_-(z+ct)\right]\vec{e}_y\overset{?}{=}0.$$

حيث $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

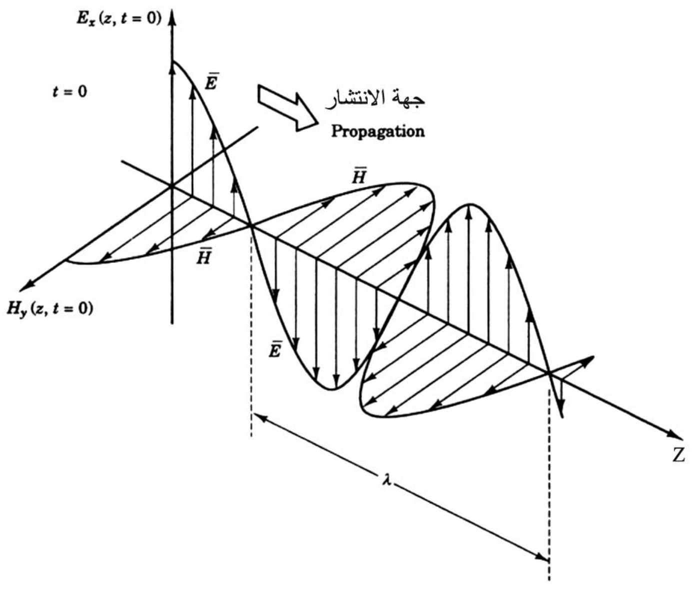
وبالتالي:

$$\left[f_+''(z-ct)+f_-''(z+ct)\right]-\varepsilon_0\mu_0\left[\left(-c^2\right)f_+''(z-ct)+c^2f_-''(z+ct)\right]\overset{?}{=}0,$$

حيث $f_\pm''$ المشتقات الثانية للتوابع $f_\pm$ بالنسبة للمتغيرات $(z\pm ct)$. وهكذا، نجد أن المعادلة الموجية للحقل الكهربائي تكون محققة، إذا كانت $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. ويتحقق قانون غوص $\vec{\nabla}.\vec{E}=\dfrac{\partial}{\partial y}E_y=0$ أيضاً. وباستخدام قانون فراداي نحصل على العبارة الآتية من أجل الحقل المغنطيسي $\vec{H}$:

$$\vec{H}=-\int\frac{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}}{\mu_0}dt=-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[f_+(z-ct)+f_-(z+ct)\right]\vec{e}_x.$$

وتحقق هذه العبارة قانون غوص بشكلٍ واضحٍ. وهكذا، نجد أن $\vec{E}$ و $\vec{H}$ المرتبط به يحققان معادلات مكسويل جميعها في الخلاء.



7- مسائل Problems:

1- توضع شحنات بكثافة خطية $\rho_{L0}\ C/cm$ على امتداد سلك طويل لانهائي بشكل موازي للمحور z ويمر من خلال النقطة (r_0,ϕ_0) في المستوي $z=0$. والمطلوب:

أثبت أن:
$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{L0}\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0},$$

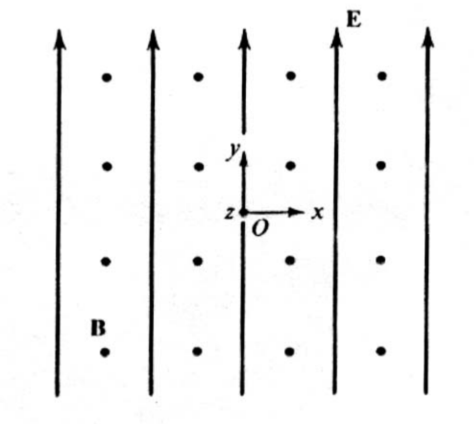
حيث:
$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi} f(r,\phi)\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}rdrd\phi=f(r_0,\phi_0).$$

2- توضع شحنة نقطية Q في النقطة (r_0,θ_0,ϕ_0). بيّن أن:
$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0^2\sin\theta_0},$$

حيث:
$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} f(r,\theta,\phi)\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0^{\,2}\sin\theta_0}r^2\sin\theta drd\theta d\phi.$$

3- اكتب معادلة الاستمرار من أجل التيار المستمر. هل لهذا التيار منابع؟ وهل تكون خطوط كثافة التيار مغلقة؟

4- لماذا تكون خطوط الحقل الكهراكدي مفتوحة دوماً؟



شكل (18.2)

5- تتحرك شحنة اختيارية q كتلتها m من وضع السكون، من نقطة المبدأ وفي اللحظة الزمنية $t=0$ في حقل كهرطيسي، فيه $\vec{E}$ و $\vec{B}$ متعامدين ولهما الشكل (18.2):
$$\vec{E}=E_0\vec{e}_y;\qquad \vec{B}=B_0\vec{e}_z,$$
حيث E_0 و B_0 ثابتان. والمطلوب: إيجاد معادلات الحركة للشحنة x و y و z، مع الأخذ بعين الاعتبار، أن:
$$\left.\begin{matrix} x=y=z \\ \upsilon_x=\upsilon_y=\upsilon_z \end{matrix}\right\}=0\quad at\quad t=0.$$

6- تُعطى سرعة الشحنة الاختيارية في المسألة 6.4.2 بالعلاقة التالية:
$$\vec{\upsilon}=\left(\frac{E_0}{B_0}-\frac{E_0}{B_0}\cos\omega_c t\right)\vec{e}_x+\left(\frac{E_0}{B_0}\sin\omega_c t\right)\vec{e}_y;\quad \omega_c=\frac{qB_0}{m}.$$

والمطلوب: إيجاد الحقل الكهربائي كما يراه مراقب يتحرك بسرعة υ مع الشحنة، حيث:
$$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{\upsilon}\wedge\vec{B}$$

7- يُعطى حقل التحريض المغنطيسي في الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة:
$$\vec{B}=\begin{cases} B_0\sin\omega t\,\vec{e}_z & for\ r<a \\ 0 & for\ r>a \end{cases}$$

حيث B_0 و ω ثابتان و a نصف قطر الأسطوانة. والمطلوب: إيجاد الحقل الكهربائي المتَحرّض.

8- نجد في المسألة 7.2.2.2 الحقل الكهربائي المتحرض، كما يلي:
$$\vec{E}=\begin{cases} \dfrac{-B_0\omega r}{2}\cos\omega t\,\vec{e}_\phi & for\ r<a \\ \dfrac{-B_0 a^2\omega}{2r}\cos\omega t\,\vec{e}_\phi & for\ r>a \end{cases}$$

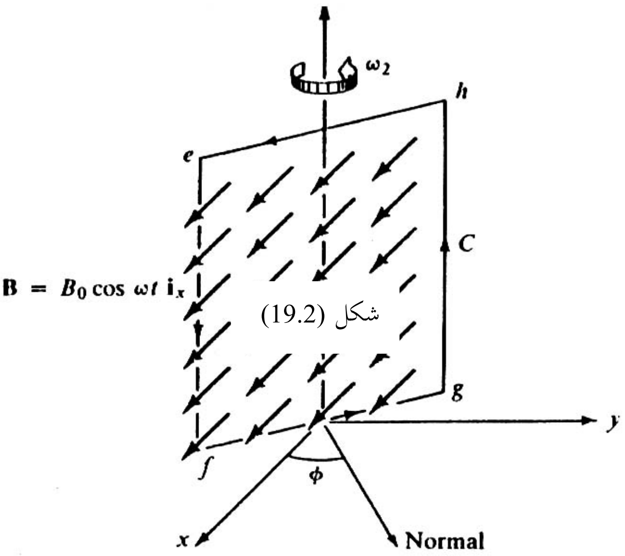
والمطلوب إيجاد الحقل المغنطيسي B .

9- لدينا حقل تحريض مغنطيسي من الشكل $\vec{B} = B_0 \cos \omega_1 t \, \vec{e}_x$ ، حيث B_0 و ω_1 ثابتان. توضع عروة من ناقل مستطيلة الشكل مساحتها A بشكل متناظر بالنسبة للمحور Z وتدور حوله بسرعة زاوية ثابتة ω_2 ، الشكل (19.2):

يصنع ناظم مستوي العروة زاوية ϕ مع المحور X تُعطى بالعلاقة $\phi = \phi_0 + \omega_2 t$ والمطلوب: أولاً: إيجاد جولان الحقل الكهربائي $\vec{E}$ حول محيط العروة، علماً أن متجهة الواحدة الناظمية على مستوي العروة يُعطى بالصيغة التالية:

$$\vec{e}_n = \cos(\phi_0 + \omega_2 t)\vec{e}_x + \sin(\phi_0 + \omega_2 t)\vec{e}_y .$$

ثانياً: إيجاد الجولان السابق، عندما تكون العروة مستقرة، أي عندما $\omega_2 = 0$ ، وعندما يكون الحقل المغنطيسي ساكناً، أي $\omega_1 = 0$.



شكل (18.2)