كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : الثامنة+تمارين /نظري/

التكامل

ليكن $y = f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$، عندئذٍ لحساب قيمة التكامل $\int_a^b f(x).dx$ نوجد التابع الأصلي $F(x)$ للتابع المكامل $f(x)$ و نكتب:

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

و لكن في بعض الأحيان يكون من الصعب إيجاد التابع الأصلي أو يكون التابع معطى بجدول، عندئذٍ نوجد قيماً تقريبية للتكامل $\int_a^b f(x).dx$ بطريقة المستطيلات أو أشباه المنحرفات و طرقاً أخرى، لنتعرف بدايةً على طريقة المستطيلات.

طريقة المستطيلات:

نعلم أن المعنى الهندسي للتكامل المحدد $\int_a^b f(x).dx$ هو المساحة الواقعة تحت منحني التابع $f(x)$ و تعتبر مساوية تقريباً لمساحة المستطيل تحت منحني التابع أي:

$\int_a^b f(x).dx \approx (b-a)f(a)$ و كلما كان طول المجال $[a,b]$ صغيراً كلما كان الخطأ في حساب المساحة صغيراً.

تعتمد هذه الطريقة على تجزئة المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية في الطول و طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ بواسطة النقاط:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

حيث: $x_{i+1} - x_i = h$

عندئذٍ تكون قيمة التكامل العددي $\int_a^b f(x).dx$ مساوية لمجموع مساحات سطوح مستطيلات التجزئة s_i حيث $i = 0,1,\dots,n-1$ و طول المستطيل s_i هو $f(x_i)$ و عرضه h.

فتكون مساحة المستطيل s_i هي: $s_i = h.f(x_i); i = 0,1,\dots,n-1$

و منه: $\int_a^b f(x).dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i)$ أي:

$$S = \int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

$S = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$ و يكون الخطأ المرتكب $E = \frac{b-a}{2}.h.\acute{f}(c); c \in [a,b]$

$$E \le \frac{b-a}{2}.h.M; M = max\{|\acute{f}(a)|, |\acute{f}(b)|\}$$

مثال: احسب القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + x^2\right).dx$ بطريقة المستطيلات حيث $n = 5$.

الحل: لدينا $a=0, b=1$ و $n=5$ بالتالي $h=\frac{1-0}{5}=0.2$ و تكون $x_{i+1}=x_i+h$

$x_0=0\,, f(0)=0.25\,, x_1=0+0.2=0.2\,, f(0.2)=0.29$

$x_2=0.2+0.2=0.4\,, f(0.4)=0.41$

$x_3=0.4+0.2=0.6\,, f(0.6)=0.61$

$x_4=0.6+0.2=0.8\,, f(0.8)=0.89$ و $x_5=1, f(1)=1.25$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{4}+x^2\right).dx\approx\frac{b-a}{n}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{4}+x^2\right).dx\approx 0.2[0.25+0.29+0.41+0.6+0.89]=0.49$$

مثال: استخدم طريقة المستطيلات لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1\frac{dx}{x+1}$ علماً أن $h=0.1$ و احسب الخطأ المرتكب.

الحل: $\frac{1-0}{n}=0.1\Rightarrow n=10$ و تكون $x_{i+1}=x_i+h$ بالتالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71428	0.66667	0.625	0.58824	0.55556	0.52632	0.5

$$\int_0^1\frac{dx}{x+1}\approx h\sum_{i=0}^{n-1}y_i=0.1(1+0.90909+0.83333+0.76923+0.71428+0.66667+0.625+0.58824+0.55556+0.52632)=0.71877$$

$$E\le\frac{b-a}{2}.h.M=\frac{1-0}{2}.(0.1).M=(0.05).M$$

$\acute{f}(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}\acute{f}(x_0)=\acute{f}(0)=-1\\ \acute{f}(x_{10})=\acute{f}(1)=-0.25\end{cases}$ و منه: $M=max\{|-0.25|,|-1|\}=1$

$$E\le(0.05)(1)=0.05$$

طريقة أشباه المنحرفات:

ليكن $y=f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$، عندئذٍ لحساب قيمة التكامل $\int_a^b f(x).dx$ بطريقة أشباه المنحرفات نقسم المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية في الطول و طول كل منها $h=\frac{b-a}{n}$ بواسطة النقاط:

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ حيث: $x_{i+1}-x_i=h$

عندئذٍ تكون قيمة التكامل العددي $\int_a^b f(x).dx$ مساوية لمجموع مساحات أشباه المنحرفات التي ارتفاع كل منها $h=x_{i+1}-x_i$

$$\int_a^b f(x).dx \approx \left[\left([f(x_0)+f(x_1)]\frac{x_1-x_0}{2}\right)+\left([f(x_1)+f(x_2)]\frac{x_2-x_1}{2}\right)+\cdots+\left([f(x_{n-1})+f(x_n)]\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right)\right]$$

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{2}[y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i]$ قانون التكاملات التقريبية بطريقة شبه المنحرف.

و يكون الخطأ المرتكب: $E \leq \frac{b-a}{12}.h^2.M; M = max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}$

مثال: استخدم طريقة أشباه المنحرفات لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ علماً أن $h = 0.1$.

الحل:

$\frac{1-0}{n} = 0.1 \Rightarrow n = 10$ و تكون $x_{i+1} = x_i + h$ بالتالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71428	0.66667	0.625	0.58824	0.55556	0.52632	0.5

$S \approx \frac{h}{2}[y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{9} y_i]$ و منه:

$$S \approx \frac{0.1}{2}[1+0.5+2(0.90909)+2(0.83333)+2(0.76923)+2(0.71428)+2(0.66667)+2(0.625)+2(0.58824)+2(0.55556)+2(0.52632)] = 0.69376$$

$\acute{f}(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ و منه: $f''(x_0) = f''(0) = 2$ و

$f''(x_{10}) = f''(1) = 0.25$ و بالتالي $M = 2$ و يكون الخطأ المرتكب:

$$E \leq \frac{1-0}{12}(0.1)^2(2) = 0.001666$$

طريقة سيمبسون:

ليكن $y = f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$، عندئذٍ لحساب قيمة التكامل $\int_a^b f(x).dx$ بطريقة سيمبسون نقسم المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية في الطول و طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ و حيث n عدد زوجي، أي نستطيع أن نكتب:

$[a,b] = [x_0,x_2] \cup [x_2,x_4] \cup \ldots \cup [x_{n-2},x_n]$ نوجد حدودية استيفاء نيوتن على المجال $[x_0,x_2]$ و نقربها إلى تابع من الدرجة الثانية أي: $P(x) = P_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0$ و منه:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx \int_{x_0}^{x_2}\left(y_0+\alpha\Delta y_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0\right).dx$$

و بما أن $\alpha = \frac{x-x_0}{h}$ و منه $x = \alpha h + x_0$ فإن $dx = h.d\alpha$ و بالتالي:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0\right).dx$$

$$= \int_0^2 \left(y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0\right).h.d\alpha$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx h.\left[y_0\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right]_0^2 = h.\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx h.\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

التكامل على المجال $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x).dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x).dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x).dx$$ و منه:

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n]$$

و هذه العلاقة ندعوها طريقة سيمبسون لحساب التكامل.

و يعطى الخطأ المرتكب بهذه الطريقة بالعلاقة:

$$E \leq \frac{b-a}{180}.h^4.M; M = max\{|f^{(4)}(x_0)|, |f^{(4)}(x_n)|\}$$

مثال: استخدم طريقة سيمبسون لحساب قيمة تقريبية للتكامل $S = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ علماً أن $h = 0.1$ و احسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$\frac{1-0}{n} = 0.1 \Rightarrow n = 10$ و تكون $x_{i+1} = x_i + h$ بالتالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71428	0.66667	0.625	0.58824	0.55556	0.52632	0.5

$$S \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_n) + y_n]$$

$$S \approx \frac{h}{3}[1 + 4(0.90909 + 0.76923 + 0.66667 + 0.58824 + 0.52632) +$$
$$2(0.83333 + 0.71428 + 0.625 + 0.55556) + 0.5] = 0.69315$$

$$\acute{f}(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \text{ و } f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \text{ و } f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \text{ و } f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{24}{(0+1)^5} = 24 \text{ و } f^{(4)}(1) = \frac{24}{(1+1)^5} = 0.75$$

$$E \leq \frac{1-0}{180}.(0.1)^4.(24) = 0.0000133\,; M = max\{|0.75|, |24|\}$$

ملاحظة: إذا كان عدد المجالات الجزئية المتساوية في الطول من المجال $[a,b]$ عدداً فردياً فإن طريقة سيمبسون لا تطبق على كامل المجال $[a,b]$ إنما تطبق طريقة سيمبسون على أكبر عدد زوجي من المجالات الجزئية و نطبق طريقة أشباه المنحرفات على المجال الجزئي الأخير.

مثال: أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}.dx$ حيث $h=0.2$ بطريقة سيمبسون.

لدينا $n=\frac{b-a}{h}=\frac{1-0}{0.2}=5$ و هو عدد فردي

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	0.961	0.852	0.698	0.527	0.368

$$S\approx\frac{h}{3}[y_0+4(y_1+y_3)+2y_2+y_4]+\frac{h}{2}[y_4+y_5]$$

$$S\approx\frac{h}{3}[1+4(0.961+0.698)+2(0.852)+0.527]+\frac{h}{2}[0.527+0.368]=0.7473$$

تمارين عملي:

أوجد القيمة التقريبية للتكاملات الآتية:

$\int_1^6(2+\sin 2\sqrt{x}).dx$ حيث $h=0.5$ (بطريقة المستطيلات)

$\int_{0.5}^1 x.\mathrm{e}^x.dx$ حيث $h=0.05$ (بطريقة أشباه المنحرفات)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}.dx$ حيث $h=\frac{\pi}{8}$ (بطريقة سيمبسون)

. أوجد المشتق التقريبي للتابع $y = 3^x$ عند النقطة x_3 و احسب الخطأ المرتكب ، حيث:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.24573	1.55184	1.93318	2.40822	3

الحل:

$$h = x_{i+1} - x_i = 0.2, \forall i \in \overline{0,5}$$

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1					
		0.24573				
0.2	1.24573		0.06038			
		0.30611		0.01485		
0.4	1.55184		0.07523		0.00362	
		0.38134		0.01847		0.00095
0.6= x_0	1.93318		0.0937		0.00457	
		0.47504		0.02304		
0.8= x_1	2.40822		0.11674			
		0.59178				
1= x_2	3					

$$\acute{f}(x_3) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\Delta^j y_3$$

$$\acute{f}(x_3) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_3 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_3\right]$$

$$\acute{f}(x_3) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.47504 - \frac{1}{2}(0.11674)\right] = 2.08335$$

لحساب الخطأ المرتكب في حساب قيمة المشتق عند النقطة x_3 :

نعتبر $x_0 = 0.6$

$$y = f(x) = 3^x \Longrightarrow f'(x) = 3^x ln(3)$$

$$f''(x) = 3^x\big(ln(3)\big)^2$$

$$,\quad f'''(x) = 3^x\big(ln(3)\big)^3 \Longrightarrow f'''(x_0) = f'''(0.6) = 2.56333$$

$$f'''(x_n) = f'''(x_2) = f'''(1) = 3.97790$$

$$n = 2$$

$$E'(x_3) \leq (-1)^2\frac{h^2}{3}M; M = max\{f^{(3)}(0.6), f^{(3)}(1)\}$$

$$M = 3.97790$$

$$E'(x_3) \leq (-1)^2\frac{(0.2)^2}{3}(3.97790) = 0.05303$$

تمرين: لتكن الدالة $y = \cos x$ المعرفة بالجدول:

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0.980	0.955	0.921	0.878	0.825

احسب قيمة تقريبية للمشتق $\acute{f}(x)$ عند كل من $x = 0.23, x = 0.45$ مستفيداً من حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الرابعة و احسب أيضاً $f''(0.23)$ و $f'''(0.23)$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.2	0.980				
		−0.025			
0.3	0.955		−0.009		
		−0.034		0	
0.4	0.921		−0.009		−0.001
		−0.043		−0.001	
0.5	0.878		−0.01		
		−0.053			
0.6	0.825				

عند النقطة $x = 0.45$ نعتبر $x_0 = 0.4$ فتكون $\alpha = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0.45-0.4}{0.1} = 0.5$ و بالتالي:

$$\acute{f}(0.45) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0\right]$$

$$\acute{f}(0.45) \approx \frac{1}{0.1}\left[-0.043 + \left(0.5 - \frac{1}{2}\right)(-0.01)\right] = -0.43$$

عند النقطة $x = 0.23$ نعتبر $x_0 = 0.2$ فتكون $\alpha = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0.23-0.2}{0.1} = 0.3$ و بالتالي:

$$\acute{f}(0.23) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{11}{12}\alpha - \frac{1}{4}\right)\Delta^4 y_0\right]$$

$$\acute{f}(0.23) \approx \frac{1}{0.1}\left[-0.025 + \left(0.3 - \frac{1}{2}\right)(-0.009) + \left(\frac{0.3^2}{2} - 0.3 + \frac{1}{3}\right)(0) + \left(\frac{0.3^3}{6} - \frac{3}{4}0.3^2 + \frac{11}{12}0.3 - \frac{1}{4}\right)(-0.001)\right] = -0.2676$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (\alpha - 1)\Delta^3 y_0 + \frac{6\alpha^2 - 18\alpha + 11}{12}\Delta^4 y_0\right)$$

$$f''(0.23) = \frac{1}{(0.1)^2}\left(-0.009 + (0.3 - 1)(0) + \frac{6(0.3)^2 - 18(0.3) + 11}{12}(-0.001)\right) = 0.9512$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 + \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\Delta^4 y_0\right)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{(0.1)^3}\left(0 + \left(0.3 - \frac{3}{2}\right)(-0.001)\right) = 1.2$$