كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

2025 2024

Facebook Group : A to Zمكتبة

القيم التقريبية لمشتق دالة

نفرض أن $x(t)$ التابع الذي يعبر عن المسافة التي يقطعها جسم متحرك بعد مرور زمن قدره t ، في بعض الحالات يكون من الصعب تحديد القانون الذي يخضع له الجسم أثناء حركته و بالتالي لا يمكن معرفة $x(t)$ بشكل واضح أي لا يمكننا حساب سرعته التي تعتمد على مشتق تابع غير معروف بشكل واضح و هو تابع المسافة، في هذه الحالة نلجأ للحساب التقريبي بمعرفة المسافات التي يقطعها الجسم خلال فترات زمنية معلومة و إيجاد حدودية الاستيفاء التي تنوب عن تابع المسافة $x(t)$ و من ثم اشتقاقها.

لنفرض أنه لدينا التابع $y = f(x)$ المعرف على المجال $[a, b]$ وفق الجدول:

x	x_0	x_1	....	x_i	.....	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	....	y_i	.....	y_n

لنفرض أننا نريد إيجاد قيمة تقريبية للمشتق الأول للتابع $f(x)$ عند نقطة ما $x_k \in [a, b]$

لنوجد صيغاً عددية لمشتق هذا التابع بالاعتماد على طرق الاستيفاء التي درسناها سابقاً.

إن كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن غريغوري من الدرجة n هي:

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\Delta^n y_0$$

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \quad + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

حيث $h = x_i - x_{i-1}$ و $\alpha = \frac{x - x_0}{h}$, و منه $x = \alpha h + x_0$.

إن $P_n(x_i) \approx f(x_i)$ و منه:

$\acute{f}(x_i) \approx \frac{\partial P_n(x_i)}{\partial x}$ و بالتالي :

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} = \frac{\partial P_n(x)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{11}{12}\alpha - \frac{1}{4}\right)\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$$

$$\acute{f}(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{11}{12}\alpha - \frac{1}{4}\right)\Delta^4 y_0 + \cdots\right] .. (*)$$

هنا نميز حالتين: $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $x_k \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

إذا كانت $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ فإننا نضع $x_0 = x_k$ و تكون أخر قيمة هي x_n أيضاً تكون $\alpha = 0$ و منه نجد:

$$\acute{f}(x_k) \approx \frac{\partial P_n(x_k)}{\partial x} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_k - \frac{1}{2}\Delta^2 y_k + \frac{1}{3}\Delta^3 y_k + \cdots\right] = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\Delta^j y_k$$

أما إذا كانت $x_k \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ عندئذٍ نضع:

$x_0 = x_m = max_{0\le i\le n}\{x_i; x_i < x_k\}$ و نعوض في:

$$\acute{f}(x_k) \approx \frac{\partial P_n(x_k)}{\partial x} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_m + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_m + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_m + \cdots\right]$$

و يكون الخطأ المرتكب في حساب المشتق عند $x = c$:

$$\acute{E}(c) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(c)\ ; c \in [x_0, x_n]$$

$$\acute{E}(x_k) \le (-1)^n \frac{h^n}{n+1} M; M = max\{f^{(n+1)}(x_0), f^{(n+1)}(x_n)\}$$

ملاحظة: باشتقاق الصيغة (*) نحصل $f''(x)$ و باشتقاق الصيغة الناتجة مرة أخرى نحصل على $f'''(x)$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (\alpha - 1)\Delta^3 y_0 + \frac{6\alpha^2 - 18\alpha + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

أمثلة:

1. أوجد المشتق التقريبي للتابع $y = 3^x$ عند النقاط x_0, x_1, x_2 حيث:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.24573	1.55184	1.93318	2.40822	3

الحل:

$$h = x_{i+1} - x_i = 0.2, \forall i \in \overline{0,5}$$

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1					
		0.24573				
0.2	1.24573		0.06038			
		0.30611		0.01485		
0.4	1.55184		0.07523		0.00362	
		0.38134		0.01847		0.00095
0.6	1.93318		0.0937		0.00457	
		0.47504		0.02304		
0.8	2.40822		0.11674			
		0.59178				
1	3					

$$\acute{f}(x_0) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{5}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\Delta^j y_0$$

$$\acute{f}(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0\right]$$

$$\acute{f}(x_0) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.24573 - \frac{1}{2}(0.06038) + \frac{1}{3}(0.01485) - \frac{1}{4}(0.00362) + \frac{1}{5}(0.00095)\right] = 1.098875$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\Delta^j y_1$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_1\right]$$

$$\acute{f}(x_1) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.30611 - \frac{1}{2}(0.07523) + \frac{1}{3}(0.01847) - \frac{1}{4}(0.00457)\right] = 1.36754$$

$$\acute{f}(x_2) \approx \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\Delta^j y_2$$

$$\acute{f}(x_2) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_2 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_2 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_2\right]$$

$$\acute{f}(x_2) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.38134 - \frac{1}{2}(0.0937) + \frac{1}{3}(0.02304)\right] = 1.71085$$

2. لتكن الدالة $y = x.\ln x$ معرفة على المجال $[1,2]$ حيث $h = 0.2$ أوجد قيمة تقريبية للمشتق $\acute{f}(x)$ عند $x = 1.1\,, x = 1.4$ مستفيداً من حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الرابعة و اذكر عبارة الخطأ المرتكب.

الحل:

نكتب جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	0					
		0.2187858				
1.2	0.2187858		**0.0334895**			
		0.2522753		**-0.0048201**		
1.4	0.4710611		0.0286694		**0.0012162**	
		0.2809447		−0.0036039		0.0004096
1.6	0.7520058		***0.0250655***		0.0008066	
		0.3060102		***-0.0027973***		
1.8	1.058016		0.0222682			
		0.3282784				
2	1.3862944					

عند النقطة $x = 1.1$ نعتبر $x_0 = 1$ فتكون $\alpha = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.1-1}{0.2} = 0.5$ و بالتالي:

$$\acute{f}(1.1) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{11}{12}\alpha - \frac{1}{4}\right)\Delta^4 y_0\right]$$

$$\acute{f}(1.1) \approx \frac{1}{0.2}\left[0.2187858 + \left(0.5 - \frac{1}{2}\right)(0.0334895) + \left(\frac{0.5^2}{2} - 0.5 + \frac{1}{3}\right)(-0.0048201) + \left(\frac{0.5^3}{6} - \frac{3}{4}0.5^2 + \frac{11}{12}0.5 - \frac{1}{4}\right)(0.0012162)\right] = 1.097969$$

عند النقطة $x = 1.4$ نعتبر $x_0 = x_2 = 1.4$ فتكون $\alpha = \frac{x-x_0}{h} = 0$ و بالتالي:

$$\acute{f}(x_2) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_2 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_2 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_2\right]$$
$$= \frac{1}{0.2}\left[0.2809447 - \frac{1}{2}(0.0250655) + \frac{1}{3}(-0.0027973)\right] = 1.337398$$

الخطأ المرتكب:

$$E(\acute{c}) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(c)\ ; c \in [1,2]$$
$$E(\acute{x}_k) \leq (-1)^n \frac{h^n}{n+1} M; M = max\{f^{(n+1)}(1), f^{(n+1)}(2)\}$$

تمرين: لتكن الدالة $y = e^x$ المعرفة عند النقطة $x_0 = 0$ و لتكن $h = 0.2$، المطلوب:

1. اكتب جدول القيم بأخذ خمس نقاط بعد النقطة الابتدائية، ثم اكتب جدول الفروق الأمامية.
2. أوجد القيمة التقريبية للمشتق $y'(0.2)$ باستخدام كثيرة حدود نيوتن الممكنة (دون إيجادها) و احسب الخطأ المرتكب.

تمرين: لتكن الدالة $y = \cos x$ المعرفة بالجدول:

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0.980	0.955	0.921	0.878	0.825

احسب قيمة تقريبية للمشتق $\acute{f}(x)$ عند كل من $x = 0.23, x = 0.45$ مستفيداً من حدودية استيفاء نيوتن من الدرجة الرابعة و احسب أيضاً $f''(0.23)$ و $f'''(0.23)$