كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

2025 2024

Facebook Group : A to Zمكتبة

الحلول التقريبية لجملة المعادلات الخطية

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

و هي جملة معادلات متجانسة عندما $b_i = 0; \forall i = 1,2,\dots,n$ و عندئذٍ يكون الحل الصفري حلاً بديهياً لها و عندما يكون $|A| \neq 0$ حيث $A = [a_{ij}]$ مصفوفة الأمثال للجملة السابقة فإن الحل الصفري يكون حلاً وحيداً، أما إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل في جملة المعادلات الخطية المتجانسة فإن للجملة حلاً غير الحل الصفري .

و بشكل عام فإننا نوجد الحلول الدقيقة (المضبوطة) للجملة السابقة بطرائق مباشرة مختلفة تعرفنا عليها سابقاً نذكر منها طريقة غاوس (إجراء تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى)، مقلوب مصفوفة، كرامر ، غاوس جوردان (إجراء تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة قطرية).

هذه الطرق ندعوها الطرق المباشرة، و عندما يصبح عدد المجاهيل كبير فإن تطبيق الطرق المباشرة ليس بالأمر السهل، في مثل هذه الحالات سوف نستخدم طرقاً أخرى تسمى الطرق غير المباشرة أو الطرق التكرارية حيث تعتمد هذه الطرق على اختيار مسبق للتقريب الأولي للحل.

فإذا أخذنا قيمة تقريبية للحل و حصلنا على قيم جديدة باستخدام الطرق التكرارية فإننا نحصل على متتاليات للحلول، هذه المتتاليات قد تكون متقاربة لحل جملة المعادلات الخطية و قد تكون متباعدة في بعض الحالات، و في حال التقارب قد يكون التقارب بطيء، و لأجل دراسة تقاربها نحتاج إلى مقياس و سنعتبر النظيم هو المقياس.

نظيم مصفوفة :

نظيم مصفوفة $A = [a_{ij}]$ من المرتبة n هو عدد حقيقي نرمز له $\|A\|$ يحقق الشروط الآتية:

1. $\|A\| \geq 0$ كما أن $\|A\| = 0$ إذا و فقط إذا كانت $A = 0$.
2. $\|KA\| = |K|\|A\|$ حيث K عدد حقيقي.

3. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ حيث $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من المرتبة n
4. $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ و بشكل عام $\|A^p\| \le \|A\|^p$ حيث p عدد طبيعي.

و من النظم المعروفة بالنسبة للمصفوفات:

$\|A\| = max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ (القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأسطر)

مثال: لتكن المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$\|A\| = max_{1\le i\le 3}\left(\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|\right) = max(11,8,18) = 18$$

ملاحظة:

نعلم انه في حالة معادلة غير خطية $f(x) = 0$ نبحث عن تابع تكرار يحقق العلاقة $x = g(x)$ و نطبق العلاقة التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ حيث $n \ge 1$ عدد طبيعي.

و بشكل مشابه :

لحل جملة معادلات خطية $AX = B$ فإننا نبحث عن مصفوفة تكرار تحقق العلاقة $X = \alpha X + \beta$ و نطبق العلاقة: $X^{n+1} = \alpha X^n + \beta$ فنحصل على التقريبات المتتالية: $X^0, X^1, \dots, X^n, \dots$ فإذا كانت هذه المتتالية متقاربة أي $lim_{n\to\infty} X^n = X$ فإن هذه النهاية هي حل لجملة المعادلات الخطية $X = \alpha X + \beta$ و بالتالي حل لجملة المعادلات الخطية $AX = B$.

لنتعرف على الطرائق غير المباشرة و التي تعطي حلولاً تقريبية لجمل المعادلات الخطية:

طريقة جاكوبي:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

حيث $a_{ii} \ne 0$ لكل $i = 1,2,\dots,n$

نعيد صياغة الجملة السابقة بشكل يسمح بإيجاد x_1 من المعادلة الأولى و إيجاد x_2 من المعادلة الثانية .... و هكذا إلى أن نوجد x_n من المعادلة n كما يلي:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$
$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n$$
$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{11}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 - \cdots - \frac{a_{3n}}{a_{33}}x_n$$

و هكذا ..

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

فإذا رمزنا بالرموز $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ عندما $i \neq j$

حيث $j = 1,2,\dots,n$ و $i = 1,2,\dots,n$ و $\alpha_{ii} = 0$ عندما $i = j$ فإنه يمكن كتابة الجملة السابقة بالشكل:

$$x_1 = \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1$$
$$x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2$$
$$x_1 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \cdots + \alpha_{3n}x_n + \beta_3$$

.

. و هكذا

$$x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} + \beta_n$$

حيث $\alpha_{ii} = 0$, $i = 1,2,\dots,n$

و بفرض المصفوفتين $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ و $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$

فإن الجملة السابقة تكتب بالشكل الاتي: $X = \alpha X + \beta$

و تكتب العلاقة التكرارية بالشكل الاتي: $x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i; i \neq j$ حيث: $k = 0,1,2,..$ أو بالشكل $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$

هذه الطريقة تسمى جاكوبي و تكون المتتالية الناتجة متقاربة إذا كان نظيم مصفوفة التكرار أصغر تماماً من الواحد أي $\|\alpha\| < 1$ و يكون الخطأ المرتكب: $E = \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\|$.

نستمر بإيجاد الجذور إلى أن يتحقق الشرط $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$ حيث ε تفاوت مسموح به.

ملاحظة: للحصول على أصغر نظيم نعيد ترتيب المعادلات بحيث تصبح عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة الأمثال أكبر ما يمكن.

مثال: لنأخذ جملة المعادلتين: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ عندئذٍ تكون:

(مصفوفة الأمثال) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ و عليه يكون $\|\alpha\| = max\{2,3\} = 3 > 1$

لذا نعيد ترتيب الجملة بالشكل: $\begin{matrix} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{matrix}$ عندئذٍ تكون:

(مصفوفة الأمثال) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ و عليه يكون $\|\alpha\| = max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} < 1$

مثال: أوجد الجذر $x^{(3)}$ لجملة المعادلات:

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

حيث: $x^{(0)} = (1,3,2)$.

نكتب جملة المعادلات بالشكل:

$$x_1 = -\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}$$
$$x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}$$
$$x_1 = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{7}{10}x_2 + \frac{1}{5}$$

نجد: $\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix}$

و يكون: $\|\alpha\| = max_{1 \le i \le 3}\left(\sum_{j=1}^{3}|\alpha_{ij}|\right) = max(0.75, 0.167, 0.8) = 0.8 < 1$

فالجملة قابلة للحل و تكون العلاقة التكرارية $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ أي:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

و منه:

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{(1)} \\ {x_2}^{(1)} \\ {x_3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{(0)} \\ {x_2}^{(0)} \\ {x_3}^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{(2)} \\ {x_2}^{(2)} \\ {x_3}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{(1)} \\ {x_2}^{(1)} \\ {x_3}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3.233 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{(3)} \\ {x_2}^{(3)} \\ {x_3}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^{(2)} \\ {x_2}^{(2)} \\ {x_3}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3.233 \\ 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.567 \\ 3.217 \\ 2.403 \end{bmatrix}$$

تمرين عملي:

أوجد الجذر $x^{(2)}$ لجملة المعادلات:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

حيث: $x^{(0)} = \left(\frac{12}{10}, \frac{12}{10}, \frac{12}{10}\right)$ ثم احسب الخطأ المرتكب.