كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : الخامسة/نظري/د.نورة العسلي

الاستيفاء

(طريقة لاغرانج ، التربيعات الصغرى)

طريقة لاغرانج:

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد حدوديات منفصلة عن بعضها البعض تدعى حدوديات لاغرانج أو مضاريب لاغرانج.

لإيجاد حدودية الاستيفاء الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالجدول الآتي:

x	x_0	x_1	....	x_n
y	y_0	y_1	....	y_n

نعرف أولا حدودية لاغرانج $L_j(x)$ و هي حدودية من الدرجة n:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}$$

و هكذا إلى :

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

نلاحظ أن حدوديات لاغرانج تحقق العلاقة: $L_j(x_i) = \begin{cases} 0\,;\, i \neq j \\ 1\,;\, i = j \end{cases}$

و بما أن مجموع كثيرات الحدود من الدرجة n هو كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر فإن:

$\sum_{j=0}^{n} L_j(x)y_j = P_n(x)$ يتبقى أن نطرح السؤال الآتي:

هل تتحقق علاقة الاستيفاء الداخلي بين كثيرة الحدود $P_n(x)$ و قيم الدالة y_j ؟

للتحقق من ذلك نجد:

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x_i)y_j$$
$$= L_0(x_i)y_0 + L_1(x_i)y_1 + \cdots + L_i(x_i)y_i + \cdots + L_n(x_i)y_n$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 1y_i + \cdots + 0 = y_i$$

تتميز طريقة لاغرانج عن طريقة نيوتن _ غريغوري بأنها **لا تشترط** أن تكون نقاط الاستيفاء الداخلي على أبعاد متساوية.

أما الخطأ المرتكب عند حساب قيمة تقريبية عند $x = c$ حيث $c \in]x_0, x_n[$ و $c \neq x_i, \forall i = 0,1,\dots,n$ فهو يعطى بالصيغة: $E(c) = \frac{\omega(c) f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$

حيث: $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$

و بوضع $M = max_{x_0 \le x \le x_n}\{f^{(n+1)}(x)\}$ يكون الخطأ الأعظمي المرتكب عند حساب قيمة تقريبية عند $x = c$:

$$E(c) \le \frac{\omega(c)M}{(n+1)!}$$

مثال (1):

أوجد بطريقة لاغرانج الحدودية الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة وفق الجدول الآتي:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y	0	1	0

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2} - 0\right)\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{4}{\pi^2}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)(x - 0)}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)} = \frac{2x\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2}$$

$$p_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$p_2(x) = \frac{2x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2}(0) + = -\frac{4}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)(1) + \frac{2x\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2}(0)$$

$$p_2(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1$$

مثال (2): أوجد بطريقة لاغرانج الحدودية الملائمة للدالة $y = \frac{1}{x}$ المعرف نقطياً وفق الجدول الآتي:

x	2	2.5	4
y	0.5	0.4	0.25

و احسب قيمة تقريبية ل $f(3)$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{4}{3}(x^2 - 6x + 8)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5)$$

و بالتالي: $P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$

و يكون: $f(3) \approx P_2(3) = 0.325$

$f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ و $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ و منه:

$$\omega(3) = (3-2)(3-2.5)(3-4) = -0.5$$

و يكون الخطأ المرتكب: $E(3) = \left|\frac{\frac{-2}{27}(-0.5)}{3!}\right| = 0.006172$

تقريبات المربعات الصغرى:

إن كل من طريقة نيوتن _ غريغوري و كذلك طريقة لاغرانج استطاعت إيجاد كثيرة حدود من الدرجة n تمر من $n+1$ نقطة من منحني دالة $y = f(x)$ و على الرغم من المزايا الحسنة لكلا الطريقتين إلا أنهما تعانيان من مشكلة أساسية و هي أن عدد نقاط المعطيات مرتبطة بكثيرة الحدود التقريبية و هذا يعني أنه من أجل عدد كبير من النقاط سنحصل على كثيرة حدود من درجة عالية و سلوكها سيعاني من ذبذبات كثيرة.

لذلك سنتعرف على طريقة جديدة تتغلب على المشكلة السابقة و هي طريقة المربعات الصغرى

سميت بهذا الاسم لأنها تسعى لجعل مجموع مربعات الأخطاء أصغرياً و هي شائعة الاستخدام في أوساط المهتمين بالفيزياء و الإحصاء كون المعطيات تكون مأخوذة من التجارب و ليست دقيقة بشكل كافٍ و في هذه الحالة ليس بالضرورة أن يمر المنحني التقريبي منها و إنما يمر مقارباً لها بشكل ملائم.

أيضاً في هذه الطريقة لا نشترط أن تكون النقاط واقعة على أبعاد متساوية.

إن تقريب المربعات الصغرى للدالة $y = f(x)$ المعرفة بالنقاط $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ هي كثيرة حدود من الدرجة m حيث $m < n$:

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ثوابت يطلب تحديدها بالشكل الآتي:

نكتب جملة المعادلات:

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^1 + a_2 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} {x_i}^m = \sum_{i=0}^{n} y_i {x_i}^0$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^3 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} {x_i}^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} y_i {x_i}^1$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^4 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} {x_i}^{m+2} = \sum_{i=0}^{n} y_i {x_i}^2$$

.

.

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^j + a_1 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^j + a_2 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^j + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} {x_i}^{m+j} = \sum_{i=0}^{n} y_i {x_i}^j$$

.

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^m + a_1 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^{n} {x_i}^{m+2} + .. + a_m \sum_{i=0}^{n} {x_i}^{2m} = \sum_{i=0}^{n} y_i {x_i}^m$$

و هي جملة $m + 1$ معادلة بحلها نحصل على الثوابت المطلوبة لتعيين كثيرة الحدود.

و يعطى الخطأ الأعظمي المرتكب بنفس الصيغة الواردة في طريقة لاغرانج.

مثال: أوجد تقريبات المربعات الصغرى الخطية و التربيعية للدالة المعرفة بالجدول الآتي:

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	1	3	8

الحل: عدد النقاط 5 و منه $n = 4$

تقريبات المربعات الخطية $m = 1$ أي إيجاد $P_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^0 + a_1 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^1 = \sum_{i=0}^{4} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^1 + a_1 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^2 = \sum_{i=0}^{4} y_i {x_i}^1$$

$\sum_{i=0}^{4} {x_i}^0 = 5$ و $\sum_{i=0}^{4} {x_i}^1 = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$ و $\sum_{i=0}^{4} y_i = 7$

$\sum_{i=0}^{4} {x_i}^1 = 0$ و $\sum_{i=0}^{4} {x_i}^2 = 10$ و $\sum_{i=0}^{4} y_i {x_i}^1 = 27$

و منه تكون جملة المعادلتين: $\begin{cases} 5a_0 = 7 \\ 10a_1 = 27 \end{cases}$ و حلهما $a_0 = \frac{7}{5}, a_1 = \frac{27}{10} = 2.7$

و بالتالي: $P_1(x) = \frac{7}{5} + 2.7x$

تقريبات المربعات التربيعية $m = 2$ أي إيجاد $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^0 + a_1 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^1 + a_2 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^2 = \sum_{i=0}^{4} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^1 + a_1 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^2 + a_2 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^3 = \sum_{i=0}^{4} y_i {x_i}^1$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^2 + a_1 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^3 + a_2 \sum_{i=0}^{4} {x_i}^4 = \sum_{i=0}^{4} y_i {x_i}^2$$

$\sum_{i=0}^{4} {x_i}^3 = 0$ و $\sum_{i=0}^{4} {x_i}^4 = 34$ و $\sum_{i=0}^{4} y_i {x_i}^2 = 21$ و منه:

$\begin{cases} 5a_0 + 10a_2 = 7 & (1) \\ 10a_1 = 27 & (2) \\ 10a_0 + 34a_2 = 2 & (3) \end{cases}$ من $(1)\&(3)$ نجد: $a_2 = 0.5$ و $a_0 = 0.4$

و من (2) نجد $a_1 = 2.7$ ومنه: $P_2(x) = 0.4 + 2.7x + 0.5x^2$

تمارين عملي:

1. أوجد بطريقة لاغرانج الحدودية الملائمة للدالة $y = f(x)$ المعرفة وفق الجدول الآتي:

x	-1	0	1	2
y	0.4	1	2.5	6.25

ثم أوجد قيمة تقريبية للدالة y عند $x = 1.5$ علماً أن الدالة هي $y = f(x) = (2.5)^x$

ثم احسب قيمة الخطأ المرتكب.

2. أوجد تقريبات المربعات الصغرى الخطية و التربيعية للدالة المعرفة بالجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
y	1100	1080	1040	960	840